Areté
Revista Amazônica de Ensino de Ciências

NÍVEIS DE PENSAMENTO ALGÉBRICO (DES)ORGANIZADOS NO LIVRO DIDÁTICO DE MATO GROSSO

LEVELS OF ALGEBRAIC THINKING (DIS)ORGANIZED IN THE TEXTBOOK OF MATO GROSSO

NIVELES DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO (DES)ORGANIZADOS EN EL LIBRO DE TEXTO DE MATO GROSSO

Geslane Figueiredo da Silva Santana*
Dailson Evangelista Costa**
Tadeu Oliver Gonçalves***

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar a sequência e estrutura de exercícios propostos nos livros didáticos do 7º Ano do Ensino Fundamental no Estado de Mato Grosso, Brasil, à luz dos níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico propostos por Radford (2006, 2009). Configura-se como uma pesquisa documental de abordagem qualitativa. O foco das análises se deu nos seis exercícios intituladas “Jogos Rápidos”, que são problemas propostos aos estudantes. Como resultados, foi possível verificar que o livro didático apresenta exercícios cuja resolução abrange o pensamento algébrico factual, contextual e padrão, no entanto, esses Jogos Rápidos são apresentados de forma desorganizada, o que não propicia o desenvolvimento da produção de conhecimento ao nível do pensamento algébrico padrão. Como resultado, consideramos minimante necessário que o professor reorganize as propostas de acordo com os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. Livro didático. Ensino Fundamental. Teoria da Objetivação.

ABSTRACT

This research aims to analyze the sequence and structure of exercises proposed in the 7th Grade textbooks of Elementary School in the state of Mato Grosso, Brazil, considering the levels of development of algebraic thinking proposed by Radford (2006, 2009). It is configured as a qualitative documentary research. The focus of the analyses was on six exercises entitled “Quick Games”, which are problems proposed to students. As results, it was possible to verify that the textbook presents exercise whose resolution encompasses factual, contextual, and patterned algebraic thinking; however, these Quick

* Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Docente na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), Sinop. Mato Grosso, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6281-8719. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8713263360849396. E-mail: geslanef@hotmail.com.
** Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Docente na Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, Tocantins, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6068-7121. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9559913886306408. E-mail: dailson_costa@uft.edu.br.
*** Doutor em Educação (UNICAMP). Docente na Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2704-5853. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6789250569319668. E-mail: tadeuoliver@yahoo.com.br.

Games are presented in a disorganized manner, which does not promote the development of knowledge production at the level of patterned algebraic thinking. As a result, we consider it minimally necessary for the teacher to reorganize the proposals according to the levels of development of algebraic thinking.

Keywords: Algebraic Thinking. Textbook. Elementary School. Objectification of Theory.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo analizar la secuencia y estructura de las actividades propuestas en los libros de texto del 7º año de Educación Primaria en el Estado de Mato Grosso, Brasil, a la luz de los niveles de desarrollo del pensamiento algebraico propuestos por Radford (2006, 2009). Se configura como una investigación documental de enfoque cualitativo. El análisis se centró en los seis "Juegos Rápidos", que son problemas propuestos a los estudiantes. Como resultado, se pudo verificar que el libro de texto presenta actividades cuya resolución abarca el pensamiento algebraico factual, contextual y patrón; sin embargo, estas actividades se presentan de forma desorganizada, lo que no favorece el desarrollo del pensamiento algebraico patrón en el alumno. Es necesario que el profesor reorganice las actividades de acuerdo con los niveles de desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: Pensamiento Algebraico. Libro de texto. Educación Primaria. Teoría de la Objetivación.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Matemática tem desempenhado um papel crucial tanto no processo de ensino e aprendizagem quanto no avanço da humanidade, tanto historicamente quanto epistemologicamente (D'Ambrosio, 1999). Inicialmente direcionada para atender às demandas práticas do cotidiano, ao longo do tempo, a Matemática evoluiu, consolidando-se como uma componente essencial no currículo de Matemática tanto no Ensino Fundamental quanto no médio (D'Ambrosio, 1999).

A introdução das linguagens simbólicas promoveu o refinamento do pensamento algébrico, desde a atribuição de significados na linguagem cotidiana até fases de observação, discussão e interpretação de problemas (Santana, 2019). Essa linguagem simbólica emerge de diálogos reflexivos que interpretam e representam ações verbais em contextos matemáticos.

A narrativa histórica da álgebra remonta às primeiras civilizações humanas, marcadas pelos avanços nos sistemas numéricos (Mendes; Chaquiam, 2016). Ao longo do tempo, diferentes sociedades conceberam seus próprios sistemas numéricos, que passaram por evoluções e transformações. Tais mudanças progressivas convergiram para a configuração atual da álgebra (Junior, 2021).

O refinamento da álgebra está intrinsecamente ligado à exploração dos padrões subjacentes à sua linguagem, representada pelas equações. Contudo, priorizar os aspectos técnicos e simbólicos da linguagem algébrica viabiliza a análise das expressões predominantes, mas pode negligenciar a compreensão dos conceitos subjacentes a elas (Otte; Santana; Paula; Barros, 2019). Essa abordagem pode prejudicar o aprendizado, especialmente no Ensino Fundamental, no qual, a introdução à álgebra é crucial para a trajetória educacional dos alunos (Silva; Curi, 2023).

De fato, o pensamento algébrico no contexto educacional pode ser delineado como um processo no qual os alunos extrapolam ideias matemáticas de um conjunto específico de exemplos, estabelecem generalizações através do discurso argumentativo e, progressivamente, as expressam por meio de abordagens formais (Kaput; Blanton, 2005).

O ensino da matemática, com foco no pensamento algébrico, deve considerar tanto as técnicas de resolução de problemas quanto as implicações dos conceitos algébricos (Lacerda; Gil, 2022). Porém, as técnicas não devem ser o único objetivo; é importante que os alunos compreendam suas aplicações e saibam quando utilizá-las, incentivando assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. Por isso, é crucial compreender os padrões e propriedades subentendidos, evitando a simples memorização das técnicas, pois trabalhar com padrões, especialmente as sequências de crescimento, permite aos alunos atribuírem significado às tarefas propostas e ao simbolismo algébrico (Radford, 2011a).

Acreditamos que o diálogo estabelecido pelo professor, aliado à habilidade de organizar e implementar práticas instrucionais, bem como promover reflexões dialogadas sobre cada situação-problema, possibilita que os alunos reexaminem as propostas de tarefas algébricas. Dessa forma, a compreensão da realidade pode ser melhor incorporada ao longo do processo de ensino da álgebra.

A aplicação apropriada do estudo da Álgebra desde o Ensino Fundamental é imprescindível para o desenvolvimento do educando, integrando-se ao seu progresso humano e às futuras interações que estabelecerá com a sociedade de maneira geral (Lacerda; Gil, 2022). As ideias são simbolicamente expressas por meio da linguagem, reflexo da produção de conhecimento abrangente. Tanto os pensamentos quanto a linguagem constituem a base para compreender o mundo e comunicar ideias, incluindo padrões matemáticos (Otte, 2012). Nesse contexto, a escola se configura como um ambiente privilegiado para o cultivo e a formação do pensamento algébrico.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

Compreendemos que o livro didático desempenha um papel crucial como instrumento capaz de contribuir significativamente para a aquisição dos saberes e competências essenciais aos indivíduos ao longo das gerações (Oliveira; Moura; Perovano, 2023).

No estado de Mato Grosso, os livros didáticos adotados para o ano de 2022 foram elaborados pela Fundação Getúlio Vargas, sendo esse material previamente utilizado na rede particular antes da pandemia do Coronavírus. Diante desse contexto, a proposta desta pesquisa tem como objetivo analisar a sequência e estrutura de exercícios propostos nos livros didáticos do 7º Ano do Ensino Fundamental no Estado de Mato Grosso, Brasil, à luz dos níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico propostos por Radford (2006, 2009).

Após identificarmos a presença do conteúdo de álgebra no livro didático do 3º bimestre do 7º ano, estabelecemos a seguinte pergunta orientadora: De que maneira está organizada a sequência e estrutura dos Jogos Rápidos propostos nos livros didáticos do 7º Ano do Ensino Fundamental no Estado de Mato Grosso?

Para analisar as tarefas denominadas Jogo Rápido propostos no livro e identificar os diferentes níveis do pensamento algébrico, foi utilizado o trabalho do pesquisador Luis Radford (2009) como referência teórica. Radford (2009) divide o pensamento algébrico em três etapas: factual, contextual e padrão. Essas categorias foram fundamentais para avaliar e interpretar as práticas apresentadas no material didático em questão.

Observamos que a sequência dos Jogos Rápidos, no material analisado, não segue a progressão ideal do pensamento algébrico proposto por Radford (2009). O pensamento factual, que deveria ser abordado no início e com maior ênfase nos Jogos Rápidos, é apresentado no final do livro, enquanto o pensamento contextual e o padrão são recorrentes, porém, desorganizados ao longo do material.

Além disso, é relevante ressaltar que a frequência das tarefas Jogo Rápido que enfatizam a abordagem de resolução por meio do pensamento padrão é elevada, o que suscita preocupações. O desenvolvimento do pensamento algébrico padrão requer uma progressão adequada pelas etapas anteriores, e a predominância excessiva nessa abordagem pode comprometer uma compreensão sólida e significativa (Radford, 2009). Destaca-se, portanto, a importância de uma abordagem mais equilibrada, que favoreça a construção gradual dos níveis do pensamento algébrico, proporcionando aos alunos a oportunidade de percorrer todas as etapas necessárias para uma compreensão completa do tema (Radford, 2006).

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

2 ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA

A metodologia adotada neste trabalho abrange uma abordagem qualitativa que possibilita uma investigação aprofundada dos significados (Kauark; Manhães; Medeiros, 2010). Através dessa metodologia, busca-se compreender e interpretar os dados de modo a identificar padrões, temas e conexões subjacentes (Marconi: Lakatos, 2021). Esta abordagem qualitativa oferece uma perspectiva holística e contextualizada, proporcionando análises e compreensões mais amplas sobre o fenômeno em estudo.

Para esta pesquisa, iniciamos com um levantamento bibliográfico abrangente para obter uma compreensão aprofundada do tema em estudo e examinar como outras pesquisas abordaram essa temática. Essa busca bibliográfica permitiu explorar as contribuições de vários autores e identificar lacunas e questões em aberto a serem investigadas.

Neste percurso, a teoria da objetivação de Luis Radford (2006, 2009) se destacou, o qual, apresenta uma abordagem histórico - filosófica sobre o pensamento algébrico. Sua metodologia e proposta teórica demonstraram estar em sintonia com nossas aspirações e expectativas, proporcionando uma base sólida para o desenvolvimento desta pesquisa. A coerência entre os conceitos propostos por Radford (2006, 2009) e os objetivos desta investigação fortalece a fundamentação teórica, permitindo uma análise mais aprofundada e consistente no contexto do ensino-aprendizagem de álgebra.

Num segundo momento, conduzimos uma exploração do material por meio de uma análise preliminar dos livros adotados pela rede pública estadual de Mato Grosso, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental. Nosso propósito foi identificar as habilidades e objetos de conhecimento vinculados à unidade temática da Álgebra.

Durante a revisão dos conteúdos em todos os livros, notamos a inclusão do tema da Álgebra no livro do 7º ano, no 3º bimestre. Essa descoberta representa um ponto crucial, direcionando nossa atenção para um estudo mais detalhado desse livro em particular.

Para analisar o livro selecionado, nos dedicamos ao estudo e compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico na perspectiva de Luis Radford. Especificamente, concentramos nossos esforços nos estudos intensificados sobre os artigos intitulado*: Signs, Gestures, Meanings: Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective*, (2009) e *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: a Semiotic Perspective* (2006).

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

Após estudarmos e compreendermos os diferentes níveis de pensamento propostos por Radford (2009), buscamos adaptar e aplicar suas interpretações aos Jogos Rápidos propostos no livro didático selecionado. O livro apresenta uma seção denominada "Jogo Rápido", composta por tarefas destinados a serem realizados em sala de aula, sob a orientação do professor, à medida que o conteúdo é apresentado.

No total, foram examinadas 6 (seis) propostas de "Jogo Rápido". Em seguida, procedemos à interpretação desses exercícios por meio de uma análise detalhada, identificando os níveis de pensamento algébrico, as relações e os padrões presentes no livro. Durante esse processo de interpretação e inferência, buscamos compreender e interpretar como as resoluções das propostas estavam relacionadas ao trabalho de Radford (2006, 2009).

Por fim, concluímos a etapa de verificação, buscando entrelaçar de maneira crítica e organizada os resultados obtidos com as contribuições teóricas de Radford (2006, 2009), especialmente relacionadas à importância do pensamento algébrico na atividade de ensino-aprendizagem. Essa fase envolveu uma reflexão crítica sobre o processo de análise e seus resultados, visando obter compreensões e conclusões relevantes.

3 EXPLORANDO OS NÍVEIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO PROPOSTOS POR LUÍS RADFORD

O professor Luís Radford é uma figura proeminente na pesquisa em Educação Matemática, cujo trabalho tem contribuído significativamente para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico e suas implicações na prática educacional. Suas investigações interdisciplinares e abordagens inovadoras continuam a enriquecer o campo e a orientar aprimoramentos na atividade de ensino-aprendizado de matemática.

A seguir, é apresentado um conciso resumo dos três níveis de pensamento algébrico explorados por Radford (2006, 2009). Nesse contexto, destaca-se ao final a elaboração de um quadro que visa funcionar como uma ferramenta de classificação e categorização para problemas matemáticos propostos em livros didáticos, buscando discernir a abrangência do pensamento algébrico delineado por Radford (2006, 2009) ao longo de sua pesquisa.

O pensamento algébrico, segundo Radford (2006, p. 2, tradução nossa), é uma "[...] forma especial de reflexão matemática". Sua Teoria da Objetivação do conhecimento considera aspectos históricos, antropológicos e epistemológicos do mundo, e discute a unificação da

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

linguagem e do pensamento. Radford (2011b, p. 319, tradução nossa) afirma que "[...] o pensamento algébrico é uma reflexão e ação cultural muito complexa que foi sendo refinada ao longo dos séculos antes de chegar à sua forma atual". No pensamento algébrico, lidamos analiticamente com quantidades incertas, tratando quantidades desconhecidas como conhecidas e realizando cálculos com números conhecidos, como na aritmética (Radford, 2011b).

No artigo *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: a Semiotic Perspective* (Pensamento algébrico e generalização de padrões: uma perspectiva semiótica), publicado em 2006, Radford estabelece uma distinção crucial entre generalização e indução simples. Da mesma forma como nem toda simbolização é considerada algébrica, nem toda atividade de padronização conduz necessariamente ao pensamento algébrico.

O autor enfatiza que este é o caso do raciocínio na indução simples, frequentemente adotado pelos alunos, mesmo que o processo indutivo possa ser expressado em símbolos, como, por exemplo, "2n+1". No entanto, quando esse resultado se baseia em uma regra formada por adivinhação, as regras assim estabelecidas são, na verdade, hipóteses. Essa forma de raciocinar opera com base em um raciocínio provável, cuja conclusão vai além do que está contido em suas premissas. Portanto, em vez de generalizar algo, os alunos estão, na verdade, realizando uma indução e não uma generalização.

Para atividades propostas que envolvem padronização, o autor apresenta uma divisão conforme o Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Abordagem dos alunos em atividades e generalizações algébricas

Indução Simples	**Generalização**			
Adivinhação (Tentativa e erro)	Aritmética	Algébrica		
		factual	contextual	simbólico

Fonte: Adaptado de Radford (2006, p. 15)

Dentre as possíveis formas de generalização, cabe salientar que nem todas são de ordem algébrica, uma vez que se verificam generalizações de padrões que assumem caráter aritmético, porém não se caracterizam como algébricas.

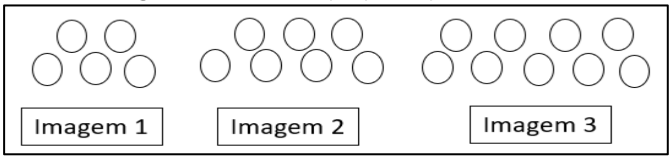
> No uso de atividades de padronização como um caminho para a álgebra, nós - professores e educadores - temos que permanecer vigilantes para não confundir generalizações algébricas com outras formas de lidar com o geral; também

> precisamos estar equipados com as estratégias pedagógicas adequadas para fazer com que os alunos se envolvam com padrões em um sentido algébrico (Radford, 2006, p.4, tradução nossa).

Portanto, em resumo, pode-se inferir que a indução simples se caracteriza como uma abordagem intuitiva e informal, fundamentada em palpites. Por outro lado, a generalização aritmética implica na identificação de padrões numéricos e na aplicação de operações aritméticas. Por fim, a generalização algébrica representa o estágio mais avançado, no qual os alunos utilizam símbolos e equações para expressar padrões e relações matemáticas de maneira abstrata e abrangente. A generalização algébrica é estruturada em três níveis de generalidade, cada um com modos correspondentes de expressão: factual, contextual e simbólico.

Em seu artigo *Signs, Gestures, Meanings: Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective* (Sinais, gestos, significados: o pensamento algébrico a partir de uma perspectiva semiótica cultural), publicado em 2009, Radford descreve os níveis do desenvolvimento do pensamento algébrico como: pensamento algébrico factual; pensamento algébrico contextual; pensamento algébrico padrão. O autor analisa a resolução dos alunos para a atividade (Figura1):

Figura 1 – Atividade proposta por Radford



Fonte: Adaptado de Radford (2009, p. 6)

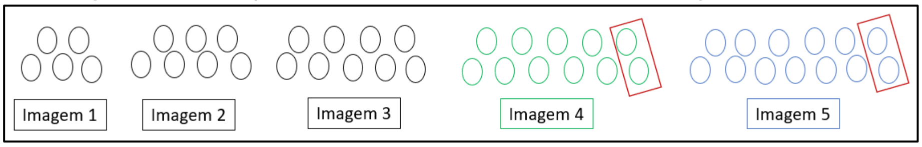
A partir da Figura 1, propõe três atividades:

i. Desenhar a imagem 4 e 5 seguindo a ordem da sequência;
ii. Encontrar o número de círculos nas imagens 10 e 100;
iii. Escrever uma mensagem para outro grupo de alunos explicando como encontrar o número de círculos em qualquer imagem, em seguida escrever uma fórmula algébrica para o número de círculos na imagem *n*.

O "pensamento algébrico factual" conecta-se profundamente com cenários concretos. Nessa abordagem algébrica, a incerteza e o desconhecido estão incorporados. O núcleo semiótico do aluno é entrelaçado com gestos, palavras e ritmos. Radford (2009) refere-se a essa maneira de pensar como fórmula de ação.

Utilizando essa abordagem do pensamento algébrico, os alunos são capazes de responder à primeira parte da atividade mostrada na Figura 1. Por exemplo, podem desenhar as imagens 4 e 5 (ver Figura 2), uma vez que percebem que o número de círculos aumenta em dois a cada transição entre figuras. Eles conseguem objetivar uma regularidade na relação entre o número de figuras e o número de círculos em suas linhas (Radford, 2009).

Figura 2 – Resolução da atividade com base pensamento algébrico factual



Fonte: Produção dos autores

Contudo, é crucial enfatizar que, para determinar o número de círculos em um padrão, não é suficiente apenas identificar regularidades. Os alunos precisam desenvolver uma fórmula que permita contar o número de círculos em qualquer figura. No entanto, as fórmulas criadas por meio dessa forma de pensamento não consistem em símbolos intrinsecamente algébricos, como símbolos alfanuméricos.

A generalização ocorre dentro de um nível básico e em um domínio limitado pelo número específico, característico desse modo de pensamento algébrico. Radford (2009, p. 40, tradução nossa) estabelece que:

> [...] apesar de sua natureza aparentemente concreta, o pensamento algébrico factual não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, ele repousa sobre mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos. A compreensão da regularidade e a imaginação das figuras na busca pela generalização dos resultados, permanece ancorada em um profundo processo de mediação sensorial – mostrando assim a natureza multi-modal do pensamento algébrico factual.

Em resumo, o "pensamento algébrico factual" é enraizado em situações concretas, na qual, a incerteza é intrínseca e a comunicação do aluno se manifesta por meio de gestos, palavras e ritmos, identificado por Radford (2009) como fórmula de ação. Embora útil para responder a contextos específicos, essa abordagem requer fórmulas baseadas em números concretos, limitando sua generalização. Portanto, essa modalidade de pensamento, embora concreta, exige uma coordenação complexa entre sinais sensoriais, linguagem e símbolos, evidenciando sua natureza multimodal.

No "pensamento algébrico contextual", o nível de objetificação é mais profundo do que o nível de ação e percepção específico do "pensamento algébrico factual". Por exemplo, na atividade mencionada acima, os alunos têm que ir além de um número específico e trabalhar com um novo objeto, uma figura geral (Radford, 2009). Portanto, os estudantes nesta forma mais abstrata de pensamento algébrico devem ser capazes de responder à segunda parte da atividade da Figura 1. Eles devem construir uma mensagem (fórmula) que possa ser usada para contar o número de círculos em qualquer figura. Nesse caso, os alunos podem usar números específicos e considerar números gerais. Um grupo apresentou a seguinte resposta:

Figura 3 – Resolução da atividade com base no pensamento algébrico contextua

Tem que adicionar um círculo ao número da figura para encontrar o número de círculos da linha superior, e adicionar um círculo à linha superior para encontrar o número de círculos da linha inferior.

Fonte: Adaptado de Radford (2009, p. 6).

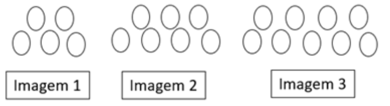
Nesse contexto, Radford (2009, p. 49) ressalta que: "No pensamento algébrico contextual, a incerteza se torna o foco explícito do discurso. Gestos e ritmo cedem lugar a indicações verbais, advérbios etc., ancorados em termos-chave como superior e inferior". Esses termos, conforme Radford (2009), são conhecidos como deícticos espaciais, ou seja, palavras usadas para descrever objetos no espaço de acordo com o contexto.

Apesar das diferenças em relação ao "pensamento algébrico factual", tanto na abordagem da incerteza quanto nos meios semióticos empregados pelos alunos para expressar suas ideias, essa forma de pensamento algébrico ainda mantém a natureza contextual e perspectiva, uma vez que está enraizada em uma maneira específica de conceber e interagir com o objeto. As fórmulas algébricas aqui desempenham o papel de descrições de termos gerais (Radford, 2009).

No estágio final do pensamento algébrico padrão, os estudantes começam a expressar suas ideias por meio de fórmulas alfanuméricas, utilizando a linguagem dos símbolos algébricos (ver Figura 4). Conforme esse modo de pensar evolui, as fórmulas deixam de ser ícones visuais e perdem a sua natureza perspectiva, passando a representar conceitos de forma totalmente abstrata (Radford, 2009).

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

Figura 4 – Resolução da atividade com base pensamento algébrico padrão

(n+1) + (n+2)	

Fonte: Adaptado de Radford (2009, p. 9)

Na abordagem de Radford (2009), ele explorou uma variedade de recursos simbólicos ricos usados nas formas de pensamento algébrico factual e contextual, como ritmos, gestos, instruções, advérbios etc. A mudança para fórmulas alfanuméricas remove os espaços, e isso resulta em uma mudança drástica na linguagem utilizada para expressar o pensamento algébrico. Assim, o uso de fórmulas alfanuméricas representa uma evolução em relação às fórmulas usadas no pensamento algébrico contextual, já que agora os alunos estão utilizando uma linguagem com maior capacidade de integração, a linguagem da notação algébrica baseada em símbolos alfanuméricos.

Assim, mesmo com o uso da linguagem simbólica, os símbolos presentes nas fórmulas ainda mantêm a experiência incorporada e a perspectiva do processo de objetivação. Neste aspecto, de acordo com Radford (2009), tais fórmulas podem ser consideradas ícones, como uma forma de descrição geométrica da figura. Isso ocorre porque elas não são meros artefatos simbólicos de cálculo abstrato, mas sim narrativas altamente condensadas da experiência matemática do aluno.

Com efeito, à medida que os alunos progridem em direção ao "pensamento algébrico padrão", as fórmulas deixam de ser percebidas apenas como "ícones visuais". Elas perdem a "natureza perspectiva", ou seja, a ligação direta com objetos ou imagens concretas. Em vez disso, as fórmulas passam a representar conceitos de forma abstrata, desvinculadas de uma representação visual específica. Os alunos começam a compreender as fórmulas como símbolos que têm significado matemático independente de uma imagem concreta. (Moraes; Costa; Mendes, 2022).

Nesse estágio mais avançado, as fórmulas alfanuméricas são interpretadas como expressões matemáticas que podem ser manipuladas e transformadas para resolver problemas e representar relações matemáticas. A evolução das fórmulas indica uma mudança na compreensão dos alunos, passando de uma visão mais visual e concreta para uma visão mais abstrata e simbólica.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

Portanto, a "evolução das fórmulas" no "pensamento algébrico padrão" envolve a mudança na forma como os alunos percebem e interpretam as fórmulas ao longo do seu desenvolvimento matemático, passando de representações visuais e concretas para uma compreensão mais abstrata e simbólica.

Assim, no "pensamento algébrico padrão" ou "simbólico", os estudantes são capazes de simplificar essas fórmulas para chegar a uma síntese não mais da descrição espacial de uma figura, mas sim da relação entre o número de figuras e o número de círculos. De acordo com Radford (2009), é a natureza não perspectiva das fórmulas que confere à álgebra o poder de descontextualizar as informações e representar conceitos de maneira abstrata. Embora Radford (2009) concorde que o domínio da linguagem dos símbolos algébricos representa o ápice do pensamento algébrico, ele também enfatiza a importância do processo pelo qual os alunos percorrem no desenvolvimento desse modo de pensar.

Em resumo, o "pensamento algébrico factual" é mais descritivo e concreto, enquanto o "pensamento algébrico contextual" introduz abstrações parciais e lida com incertezas. O "pensamento algébrico padrão" marca a transição para uma linguagem simbólica abstrata, permitindo manipulações e generalizações mais profundas. Cada estágio é um passo crucial no desenvolvimento da compreensão algébrica.

Com base nas interpretações das obras de Radford (2006, 2009), elaboramos o Quadro 2 para categorizar os estágios do pensamento algébrico no ensino-aprendizagem. Nesse contexto, descrevemos as características predominantes em cada estágio, visando sintetizar esses diferentes níveis. O objetivo é oferecer um meio eficaz de identificar nos exercícios do livro didático selecionado os diversos níveis de pensamento algébrico propostos por Radford (2006, 2009).

Quadro 2 – Simplificação dos Níveis do Pensamento Algébrico para análise

Pensamento algébrico	Característica
Factual	Ausência de fórmulas, dados e símbolos matemáticos. O desenvolvimento das fórmulas não consiste em símbolos algébricos. A generalização está dentro de um nível básico e domínio limitado. Comunicação por meio de gestos, palavras e ritmos compõem a essência semiótica do aluno. A atividade enfoca aspectos concretos, em profunda conexão com situações concretas.
Contextual	O nível de objetificação é mais profundo do que o factual. Aplica conceitos em contextos abstratos. Apresenta termos descritivos. Lida com incerteza e generalizações.

	A comunicação ocorre por meio de deícticos espaciais, isto é, palavras usadas para descrever objetos no espaço de acordo com o contexto. A atividade requer que os alunos desenvolvam conceitos com o contexto. Construção de fórmulas por meio da fala e escrita.
Padrão	A atividade possibilita que os alunos expressam ideias por meio de fórmulas alfanuméricas, usando a linguagem dos símbolos algébricos. Ocorre a perda da natureza perspectiva, as fórmulas deixam de ser ícones visuais e perdem sua ligação direta com representações concretas. As fórmulas são interpretadas como símbolos que podem ser manipulados e transformados para resolver problemas e representar relações matemáticas. As fórmulas são narrativas condensadas da experiência matemática dos alunos, representando conceitos de forma abstrata. Ocorre o processo de abstração e generalização, no qual, os alunos compreendem as fórmulas como expressões matemáticas abstratas, independentes de imagens concretas.

Fonte: Produção dos autores

Claramente, o trabalho do pesquisador Radford é embasado por um conjunto abrangente de elementos, incluindo contexto histórico, filosófico, epistemológico e semiótico. Esta classificação apresentada é apenas uma parte desse cenário mais amplo.

Como é comum em muitas classificações, as fronteiras dessas categorias não são necessariamente bem definidas. Além disso, essas formas de pensamento não precisam necessariamente se excluir mutuamente. Um aluno, por exemplo, pode muito bem combinar formas de pensamento factual e simbólico. A tipologia é, em vez disso, uma tentativa de compreender os processos pelos quais os alunos passam ao entrarem em contato com as formas de ação, reflexão e raciocínio transmitidas pela prática historicamente estabelecida da álgebra escolar.

A concepção subjacente a essa abordagem consiste em empregar o quadro como uma ferramenta de categorização as propostas, a fim de viabilizar a observação e análise da congruência entre as propostas de tarefas e o desenvolvimento do pensamento algébrico delineado por Radford. De fato, na Teoria da Objetivação o pensamento algébrico não é identificado em tarefas de livro didático e sim na Atividade, denominada por Radford (2021, p. 54) de labor conjunto.

> É um espaço de encontro, dissidência e subversão, no qual professores e estudantes se tornam indivíduos que estão mais do que no mundo: são indivíduos interessados uns nos outros e em seu labor conjunto; indivíduos que intervêm, transformam, sonham, apreendem, sofrem e esperam juntos.

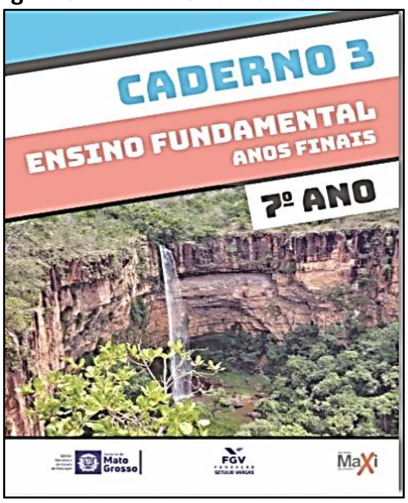
Segundo Radford (2021), o ensino-aprendizagem acontece na atividade, isto é, no labor conjunto, afastando-se do ensino tradicional com o uso de livros didáticos. Neste modelo, o professor apresenta as tarefas do livro, e alguns alunos tentam resolvê-las dentro de um curto período de tempo. Antes que a maioria dos alunos consiga concluir as tarefas, o sino toca, e o professor se vê obrigado a "passar" todas as tarefas do livro, resolvendo os exercícios unilateralmente no quadro, como um monólogo. No entanto, a Teoria da Objeção parte da premissa de que "Como a matemática é simultaneamente visual, tátil, auditiva, material, gestural e cinestésica, só pode ganhar vida através do labor conjunto sensível e artefactual de professores e estudantes"(Radford 2021 p. 50).

Ciente de que o autor não formulou essa tipologia com a intenção de servir como um critério estrito de classificação de atividades, o propósito aqui é elaborar o quadro de maneira a promover uma discussão a respeito das possíveis abordagens para a resolução das propostas no livro didático analisado, de modo que essas contribuam para o aprimoramento do pensamento algébrico dos alunos.

4 ANÁLISES E RESULTADOS

Identificamos nos livros de Matemática utilizados nos anos finais do Ensino Fundamental na rede pública estadual de Mato Grosso no ano de 2022, o tema relacionado ao conteúdo de Álgebra do 3º bimestre do 7º Ano, especificamente na Unidade 1, intitulado por *Linguagem Algébrica*, da coleção Ensino Fundamental 2: Matemática, 6º ao 9º ano, cadernos 1 a 4 (aluno)/ (2019). Veja Figura 5.

Figura 5 - Livro do 3º bimestre do 7º Ano



Fonte: Carvalho *et al* (2019, p. capa).

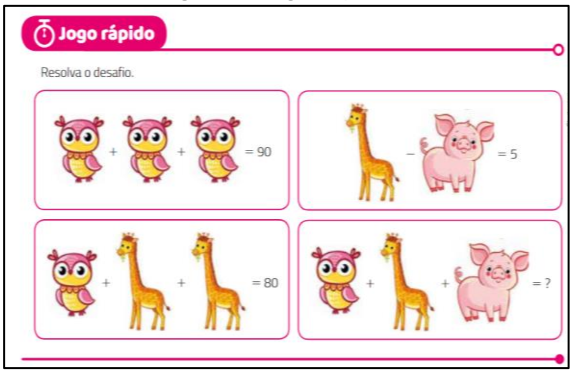
https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

No capítulo referente à abordagem do conteúdo, o livro contém 6 "Jogo Rápido", o qual, consiste em problemas propostos aos alunos, em alguns dos quais o livro apresenta a solução, discute formas de resolver ou não oferece nenhum comentário referente à proposta.

4.1 Jogo Rápido 1

Na proposta da Figura 6, é pedido que sejam somadas ou subtraídas as figuras (porco, coruja e girafa), que são os termos-chave.

Figura 6 - Jogo Rápido 1.



Fonte: Carvalho *et al* (2019, p. 195)

Em conformidade com o Quadro 2, a proposta não se enquadra estritamente no pensamento algébrico factual, uma vez que apresenta equações com símbolos matemáticos e envolve cálculos numéricos. Embora haja a presença de equações e cálculos, a proposta também não se alinha inteiramente com o pensamento algébrico padrão, pois não se concentra exclusivamente na manipulação de fórmulas alfanuméricas. Portanto, a proposta se encaixa melhor no contexto do pensamento algébrico contextual, uma vez que se baseia na aplicação de conceitos algébricos em situações contextualizadas.

4.2 Jogo Rápido 2

Na sequência, analisa-se o Jogo Rápido 2 (Figura 7), cuja resolução pode ser associada ao pensamento algébrico contextual.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

Figura 7 - Jogo Rápido 2

Jogo Rápido

Faça a conversão da linguagem comum para a linguagem algébrica utilizando a variável x.

Linguagem comum	Linguagem Algébrica
Um número.	
O dobro de um número.	
Um número acrescido de 5.	
O sucessor de um número.	
A metade de um número.	
A terça parte de um número, somada a 5.	
A soma de um número com 9.	
Um número dividido por 5.	
O triplo de um número, subtraído 3.	

Fonte: Adaptado de Carvalho *et al* (2019, p. 197).

A proposta de traduzir expressões da linguagem cotidiana para a linguagem algébrica, utilizando a variável *x*, pode ser associada, em certa perspectiva, ao pensamento algébrico padrão. Ao considerar a tradução de descrições cotidianas para expressões algébricas, envolve a aplicação de conceitos algébricos em contextos abstratos. As expressões originais são baseadas em termos descritivos, como “dobro”, “acrescido de”, “soma de”, etc., que precisam ser interpretados e transformados em termos algébricos.

Contudo a proposta também requer a aplicação de fórmulas gerais a partir de descrições específicas. Os termos utilizados introduzem incerteza e generalizações, pois os alunos devem criar expressões que representam um padrão para diferentes valores numéricos. Assim, os alunos são desafiados a construir expressões algébricas apropriadas, o que envolve a aplicação de regras e símbolos da notação algébrica para traduzir as situações cotidianas em representações matemáticas. Portanto, a proposta em questão reflete o pensamento algébrico contextual devido à sua ênfase na aplicação de conceitos em contextos abstratos e na tradução de descrições cotidianas em expressões algébricas.

O problema é que esta é a segunda proposta, e já remete o aluno à recorrência e repetição, bastando associar que um número procurado é *x* e, então, seguir o resto das recomendações. Neste sentido, não necessariamente pode ser considerado pensamento algébrico padrão, visto que dificilmente o aluno é conduzido a um processo de generalização.

Na mesma página do Jogo Rápido proposto tem-se o seguinte texto: “As letras mais usuais para representar um valor desconhecido são *x, y, z, a, b,* e *c*, no entanto, se não se tratar de algo específico qualquer letra pode ser utilizada” (Carvalho *et al*, 2019, p. 197, grifos do autor).

Além disso, são apresentados exemplos dos quais o aluno pode substituir "um número" por "*n*"; no segundo ele pode mudar "o dobro de um número" por "*2n*" e assim por diante. Neste sentido, considerando o contexto sequencial, no qual a proposta está proposta no livro, é difícil caracterizá-la como uma proposta alinhada com o pensamento algébrico conceitual, visto que o mesmo tem por objetivo que o aluno consiga aplicar conceitos em contextos abstratos e construção de fórmulas por meio da fala e escrita. Esta proposta pode ser trabalhada antes de explicar e apresentar os conceitos do livro.

4.3 Jogo Rápido 3

Ao analisar o "Jogo Rápido 3" (Figura 8), verifica-se que nela é pedido que os alunos identifiquem o coeficiente numérico e a parte literal de cada termo e, posteriormente, o aluno poderá responder à questão *a* e *b*.

Figura 8 - Jogo Rápido 3

Jogo Rápido

Complete a tabela identificando o coeficiente numérico e a parte literal de cada termo. Em seguida, responda às perguntas.

Termos	Coeficiente numérico	Parte literal
x		
$+3xy$		
-100		
$-1{,}3ab^2$		
$(-8/3)m$		
$5b$		
$-x^2$		
$-p/10$		
m^2n		
$+2ab^2$		
$+21$		

a) Os termos x e $-x^2$ são semelhantes? Justifique.
b) Quais termos apresentados na tabela são semelhantes?

Fonte: Adaptado de Carvalho *et al* (2019, p. 199).

A tarefa em análise tem o potencial de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico padrão, permitindo aos alunos identificarem coeficientes numéricos, partes literais e termos semelhantes, o que contribui para a compreensão dos conceitos fundamentais da álgebra. No entanto, a estrutura da proposta pode influenciar a abordagem dos alunos aos conceitos. Ao fornecer informações prévias, exemplos semelhantes e uma estrutura orientada, a proposta pode inadvertidamente incentivar a repetição e a memorização, limitando a oportunidade de os alunos desenvolverem habilidades de abstração e generalização, essenciais para o pensamento algébrico padrão.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

O verdadeiro desenvolvimento do pensamento algébrico padrão requer a capacidade de aplicar conceitos em diversos contextos, identificar relações entre elementos e resolver problemas de forma criativa. A abstração e generalização desempenham papéis centrais nesse processo, permitindo que os alunos reconheçam padrões abstratos nas expressões e os apliquem em situações diversas (Radford, 2009).

Ao considerar o contexto em que o Jogo Rápido é proposto e o conteúdo apresentado antes e depois, percebe-se que a abordagem orientada e o foco específico nas características das expressões podem restringir a generalização dos conceitos. Assim, embora os alunos compreendam os princípios subjacentes, podem não ser desafiados a aplicá-los de forma independente em diferentes contextos.

4.4 Jogo Rápido 4

No "Jogo Rápido 4" (Figura 9), solicita-se a simplificação das expressões algébricas, contudo, nesse momento o aluno pode somar ou subtrair as expressões com termos semelhantes e retirar a parte literal.

Figura 9 - Jogo Rápido 4

Jogo Rápido

Simplifique as expressões algébricas.

a) $4x - 3x - 2x =$ __________
b) $7ab^3 - 4a - 6a - 12ab^3 =$ __________
c) $2,5y + 1,8y - 7 - 2y =$ __________
d) $(1/3)\,a - (1/2)\,a + a =$ __________

Fonte: Adaptado de Carvalho et al (2019, p. 200).

A resolução de exercícios envolvendo manipulação algébrica pode caracterizar, conforme Radford (2009), o pensamento algébrico padrão. Contudo, é essencial que o estudante utilize a linguagem algébrica sem depender de representações imagéticas. Além disso, para concluir esse Jogo Rápido, é necessário que o aluno já tenha familiaridade com os demais níveis de desenvolvimento.

Dessa forma, a habilidade de manipular expressões algébricas de maneira abstrata, prescindindo de suporte visual, é uma marca distintiva do pensamento algébrico padrão. Esse estágio não apenas requer a destreza nas operações algébricas, mas também uma compreensão aprofundada dos conceitos subjacentes. Isso possibilita ao estudante trabalhar de forma simbólica e abstrata no contexto da álgebra. Contudo, considerando o contexto do livro que a acompanha a proposta, percebe-se que ele apresenta prévias explicações e exemplos sobre simplificação de expressões, orientando os alunos a aplicarem um método específico - a soma de termos semelhantes.

Deste modo, o livro não explora de modo aprofundado a generalização ou aplicação ampla dos conceitos, o que caracterizaria o pensamento algébrico padrão. A proposta, embora envolva manipulação de fórmulas e identificação de termos semelhantes, não promove o incentivo a generalização além do método introduzido, não há uma exploração profunda da generalização, que é fundamental no pensamento padrão. A proposta incorpora elementos do pensamento algébrico padrão. Ela promove aplicação prática, mas não aborda completamente a abstração e generalização inerentes ao pensamento algébrico padrão.

4.5 Jogo Rápido 5

No "Jogo Rápido 5" (Figura 10), observa-se a solicitação para calcular as expressões algébricas, seguindo a mesma abordagem da proposta anterior.

Figura 10 - Jogo Rápido 5

Jogo Rápido

Calcule o valor numérico das expressões algébricas a seguir.

a) $-5x + 15$, considere $x = -8$

b) $3abc - 2ab + 3bc$, considere $a = 3$, $b = -2$ e $c = 5$

c) $x^2y^3 + 2xy$, considere $x = -1$ e $y = +1$

Fonte: Adaptado de Carvalho *et al* (2019, p. 202).

As propostas envolvem a manipulação de símbolos algébricos e a execução de operações algébricas para obter valores numéricos. Essa abordagem reflete principalmente o pensamento algébrico padrão, no qual as fórmulas são interpretadas como entidades simbólicas que podem ser manipuladas para resolver problemas.

No material didático, é fornecida uma explicação prévia sobre a conversão de expressões algébricas em expressões numéricas ao substituir variáveis por valores específicos.

Exemplos ilustrativos também são apresentados para representar a resolução de expressões algébricas semelhantes.

Um desses exemplos trata do conserto de uma geladeira, em que a fórmula *50 + 30p* é utilizada para calcular o custo, com *p* representando a quantidade de peças a serem substituídas (Carvalho *et al*, 2019). No entanto, a inclusão desse exemplo resolvido antes do "Jogo Rápido 5" pode minar a natureza do pensamento algébrico padrão, já que a solução pronta pode eliminar a necessidade de descoberta, compreensão e resolução.

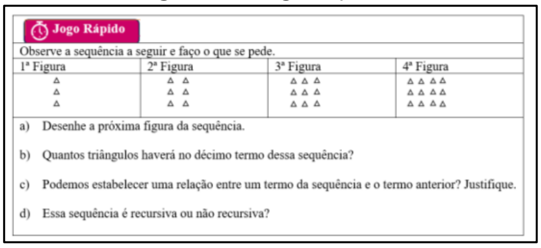
A proposta, conforme delineada, concentra-se primordialmente na substituição de variáveis por valores específicos e na avaliação do resultado numérico da expressão. Embora essa abordagem seja relevante para o estudo das expressões algébricas, ela pode ser vista mais como uma aplicação direta do que como uma oportunidade para promover uma compreensão completa da abstração e generalização dos conceitos (LOPES; FELIX; SÁ, 2022).

Com base no material didático e nas ilustrações, pode-se interpretar o Jogo Rápido como uma maneira de os alunos praticarem o cálculo numérico usando expressões algébricas específicas. No entanto, é válido conjecturar que essa abordagem pode não contribuir substancialmente para o avanço do pensamento algébrico padrão, no sentido de desenvolver a capacidade dos alunos de abstrair, generalizar e manipular fórmulas de forma independente das representações concretas.

4.6 Jogo Rápido 6

Já em relação a "Jogo Rápido 6" (Figura 11), trata-se de um jogo rápido sobre sequências recursivas e não recursivas, ou seja, quando está relacionada a ideia de repetição, a qual, por contar com uma ajuda imagética e a regularidade, pode ser vista como a interligação dos três níveis de pensamento algébrico (factual, contextual e padrão) propostos por Radford (2009).

Figura 11 – Jogo Rápido 6


Jogo Rápido

Observe a sequência a seguir e faço o que se pede.

1ª Figura	2ª Figura	3ª Figura	4ª Figura
△ △ △	△ △ △ △ △ △	△ △ △ △ △ △ △ △ △	△ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △

a) Desenhe a próxima figura da sequência.

b) Quantos triângulos haverá no décimo termo dessa sequência?

c) Podemos estabelecer uma relação entre um termo da sequência e o termo anterior? Justifique.

d) Essa sequência é recursiva ou não recursiva?

Fonte: Adaptado de Carvalho et al (2019, p. 206)

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 1984-7505

A proposta foi analisada à luz das características descritas por Radford (2006, 2009) nos três níveis de pensamento algébrico. Na primeira parte da proposta, os alunos são solicitados a identificar um padrão visual na sequência de figuras compostas por triângulos. Essa habilidade de perceber e representar padrões visuais é fundamentalmente enquadrada no nível factual do pensamento algébrico. Isso ocorre porque essa etapa requer a capacidade de observar e identificar relações concretas entre os elementos presentes.

No próximo ponto, os alunos são desafiados a generalizar a relação entre o número da figura e a quantidade de triângulos na sequência até o décimo termo. Para resolver essa questão, os alunos precisam perceber que o número de triângulos está aumentando em uma proporção constante. Essa habilidade de generalização e a percepção de uma relação constante estão mais alinhadas com o nível contextual do pensamento algébrico, que demanda uma compreensão mais abstrata e aplicação conceitual.

Na terceira parte da proposta os alunos são incentivados a examinar a existência de uma relação entre os termos consecutivos da sequência e a justificar essa relação com base em sua compreensão dos padrões subjacentes. Essa análise relacional e a justificativa correspondente estão principalmente associadas ao nível contextual, uma vez que os alunos estão aplicando conceitos e generalizando para explicar a relação observada.

A última questão investiga se a sequência é recursiva ou não, e isso remete à maneira como os termos da sequência são gerados. Identificar padrões recursivos ou não recursivos exige uma compreensão mais profunda das relações entre os termos e está vinculado ao nível padrão do pensamento algébrico. Contudo, a resposta a essa pergunta também pode ser influenciada por uma análise mais “contextual”, na qual os alunos exploram as conexões conceituais subjacentes.

Em resumo, a proposta abrange elementos dos três níveis de pensamento algébrico, abordando desde a identificação de padrões visuais até a compreensão e generalização de relações mais abstratas entre os termos da sequência. Isso oferece aos alunos uma oportunidade abrangente para desenvolver seu pensamento algébrico, englobando múltiplos aspectos de compreensão conceitual e aplicação prática.

Com efeito, ao reformular a questão, na parte *b*, poderia ser solicitado aos alunos formularem uma expressão algébrica para representar o número de triângulos na *n-ésima* figura da sequência e que explicassem o raciocínio implícito. Esse ajuste visaria avaliar a capacidade dos alunos de estabelecer relações simbólicas entre os termos da sequência, destacando o nível padrão do pensamento algébrico.

De maneira similar, na parte *c*, os alunos poderiam ser convidados a supor que já conhecem o número de triângulos na *n-ésima* figura e explicar como calcular o número de triângulos na *(n+1)-ésima* figura com base na expressão algébrica formulada na parte *b*. O objetivo seria avaliar a compreensão dos alunos sobre a relação entre termos consecutivos na sequência e sua habilidade de aplicar generalizações, ressaltando o nível padrão do pensamento algébrico.

Por fim, na parte *d*, os alunos poderiam ser solicitados a discutir se a sequência é recursiva ou não recursiva, acompanhada de uma justificativa baseada na geração dos termos e nas relações entre eles, objetivando avaliar a habilidade dos alunos em analisar a estrutura da sequência e reconhecer se ela é baseada em recursão ou não, demonstrando o nível padrão do pensamento algébrico.

Ao adaptar a questão dessa forma, seria possível criar um ambiente no qual os alunos abordariam diferentes aspectos do pensamento algébrico, desde a observação de padrões visuais até a formulação de expressões simbólicas e a compreensão das relações entre termos consecutivos. Essa readequação permitiria uma avaliação mais abrangente das habilidades conceituais e aplicadas dos alunos em relação aos diferentes níveis do pensamento algébrico.

5 RESULTADOS E APONTAMENTOS

Segundo Radford (2009), o pensamento algébrico é um tipo de pensamento que pode fazer um indivíduo generalizar sobre casos específicos e até criar condições para que esse indivíduo possa expressar essas ideias gerais por meio da fala, gestos ou imagens, e escrevê-las de maneira matematicamente formal. Nesse mesmo contexto, o pensamento algébrico requer mobilizar a capacidade de criar relações, modelar, generalizar, tratar o desconhecido como se fosse conhecido e construir os significados dos objetos e da linguagem.

Diante do exposto, e a partir das análises realizadas na subseção anterior, apresentamos no Quadro 3 o pensamento algébrico desenvolvido em cada uma delas.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 ISSN 1984-7505

Quadro 3 – Classificação do pensamento algébrico

Jogo Rápido	Classificação
Jogo Rápido 1	contextual
Jogo Rápido 2	padrão
Jogo Rápido 3	contextual
Jogo Rápido 4	padrão
Jogo Rápido 5	padrão
Jogo Rápido 6	factual, contextual, padrão

Fonte: Fonte: Produção dos autores.

Percebemos que a ordem das tarefas propostas não seguem a linha de desenvolvimento de Radford (2009), pois inicia com o pensamento contextual, na segunda proposta já exige o pensamento padrão. Assim, as propostas são organizadas aleatoriamente, sem a caracterização da importância referente ao desenvolvimento do pensamento algébrico na atividade de ensino-aprendizagem.

> Apesar de sua natureza aparentemente concreta, o pensamento algébrico factual não é uma forma de reflexão matemática. Ao contrário, [...] se baseia em mecanismos de percepção altamente evoluídos e uma sofisticada coordenação rítmica gestos, palavras e símbolos. A apreensão da regularidade e a imaginação dos números no curso da generalização resultam, e permanecem ancorados, um profundo processo sensorial mediado mostrando assim a natureza multimodal do pensamento algébrico factual (Radford, 2009, p. 40, tradução nossa).

É evidente a falta de propostas que se baseiem no pensamento factual, o que pode limitar os alunos de se expressarem culturalmente usando seus próprios gestos e palavras para ressignificar seu ensino-aprendizagem. De acordo com Radford (2009), no pensamento contextual, o aluno tem a oportunidade de substituir ritmos e gestos por termos como “inferior” e “superior”.

> Esses termos são o que os linguistas chamam de dêiticos espaciais, ou seja, palavras com as quais descrevemos, forma contextual, objetos no espaço. A variável de objeto indeterminado agora é explicitamente mencionada através do termo “número da figura” do pensamento algébrico factual, tanto em termos da forma como a indeterminação é manipulado e os meios semióticos pelos quais os alunos pensam, a nova forma do pensamento algébrico ainda é contextual e “perspectivo” na medida em que se baseia em uma maneira particular de considerar algo. A fórmula algébrica é de fato uma descrição do termo geral, como deveria ser desenhado ou imaginado (Radford, 2009, p. 6, tradução nossa).

As características fundamentais do pensamento conceitual não são valorizadas nem abordadas nas propostas. Além disso, não há mediação que propicie uma abordagem relacionada aos meios semióticos pelos quais os alunos pensam. Assim, é nítido que existe uma necessidade de repensar a produção do conhecimento, enquanto atividade no ensino-aprendizagem referente aos pensamentos algébricos segundo Radford (2009).

É recomendado que o professor faça perguntas individualmente, sempre usando termos e palavras condizentes com a cultura dos estudantes, por exemplo: Quantos círculos ou bolinhas ou anéis tem na primeira figura? E na outra? E na terceira? Na quarta? Na quinta? E em cem?... O número de bolinhas/círculos está aumentando ou diminuindo? Fica muito maior de imagem para imagem? Como você explicaria o aumento dos círculos de imagem para imagem? Qual é a relação entre o número da figura e o número de círculos nela?... Se usássemos um desenho animado para descrever o número correspondente a uma determinada figura, quantos círculos haveria nessa figura? E em outras? Visto que "[...] o professor responde à sua necessidade de ensinar ao articular os objetivos de ensino, as ações, as operações e os instrumentos a serem utilizados neste processo" (Santos; Moretti, p. 96, 2022).

É essencial organizar toda atividade de ensino-aprendizagem, como formas de produção de saberes impulsionadas por esforços coletivos baseados na história e na cultura; bem como formas de colaboração humana, as quais, são apoiadas por uma ética comunitária. Na TO, a sala de aula se revela como um espaço de debates no qual os alunos são encorajados a mostrar abertura para com os outros, responsabilidade, solidariedade, cuidado e consciência crítica. (Radford, 2021).

Com base no exposto, acreditamos que o pensamento algébrico consiste nos seguintes elementos ou características: criar relacionamentos, generalizar, modelar, construir significado e lidar com o desconhecido. Além disso, argumentamos neste trabalho que, no centro dessas qualidades, está a capacidade de construir relacionamentos, mas ainda é apoiada por outras características igualmente importantes. Portanto, acreditamos que a primeira característica do pensamento algébrico que um sujeito desenvolve e revela é a capacidade de criar relações, seguidas por outras.

6. CONSIDERAÇÕES

A pesquisa teve como objetivo analisar a sequência e estrutura de exercícios propostos nos livros didáticos do 7º Ano do Ensino Fundamental no Estado de Mato Grosso, Brasil, à luz dos níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico propostos por Radford (2006, 2009).

Assim, argumentamos que o pensamento algébrico necessita de certas habilidades para ser alcançado, tais como: a capacidade de construir relacionamentos; habilidades de modelagem; generalização; a capacidade de atribuir significados à linguagem e objetos algébricos; e a habilidade de lidar analiticamente com o desconhecido como se já fosse conhecido.

A atividade do ensino-aprendizagem de álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico têm relevância no contexto educacional em geral, e na área de Educação Matemática em particular. A disciplina, abordada de maneira distinta em diferentes documentos curriculares, ganhou destaque no currículo comum nacional, conforme delineado pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017). Este documento propõe cinco unidades temáticas inter-relacionadas, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Quantidades e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Tais unidades têm como objetivo orientar o desenvolvimento das competências matemáticas adquiridas no Ensino Fundamental, visando um ensino-aprendizagem mais efetivo.

Conforme observado, o livro adotado pela rede pública estadual de Mato Grosso, referente ao 7º ano, aborda o conteúdo de álgebra, fornecendo explicações e propostas de tarefas. No entanto, ao analisar a resolução dessas propostas, torna-se evidente a presença dos três tipos de pensamento algébrico: pensamento algébrico factual, pensamento algébrico contextual e pensamento padrão.

No entanto, o pensamento algébrico factual aparece em apenas uma tarefa e não se alinha totalmente com a proposta de Radford (2009), a qual, envolve a compreensão de atividades em que padrões são identificados, mas sem uma generalização da relação ao trabalhar com casos individuais. Além disso, é notável que as tarefas com pensamento factual aparecem ao final do livro, quando deveriam, de acordo com a proposta de Radford, ser apresentadas no início. Essa ausência de propostas fundamentadas no pensamento factual pode restringir a expressão cultural dos alunos, impedindo-os de usar gestos e palavras próprias para reinterpretar sua aprendizagem.

Ademais, as características essenciais do pensamento conceitual não são valorizadas nem abordadas nos Jogos Rápidos. A falta de mediação para explorar os meios semióticos pelos quais os alunos pensam também é evidente. Dessa forma, é claro que há uma necessidade premente de aprimorar a abordagem dos pensamentos algébricos, conforme sugerido por Radford (2009).

A recorrência de propostas que poderiam explorar o pensamento padrão é notavelmente alta. Essa repetição excessiva é preocupante, uma vez que o desenvolvimento do pensamento algébrico padrão, que envolve a capacidade de generalização, requer a progressão por diferentes etapas. A disposição atual as propostas no livro não favorecem adequadamente esse processo de desenvolvimento da generalização. Diante dessa situação, destaca-se a importância da intervenção do professor para reorganizar a ordem de apresentação as propostas de exercícios aos alunos.

As propostas designadas como “Jogo Rápido” oferecem uma oportunidade valiosa para os alunos esclarecerem dúvidas e consolidarem o entendimento do conteúdo abordado, especialmente quando laboradas pelos professores. No entanto, ao considerar exclusivamente a ordem em que são apresentadas no livro, sem considerar explicações prévias, algumas dessas propostas carecem de clareza em seus objetivos, cujo ausência, pode representar um obstáculo para a atividade do ensino-aprendizagem e para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As explicações prévias fornecidas pelo livro podem comprometer o desenvolvimento da resolução as propostas baseadas no pensamento algébrico. Ao analisar o contexto em que os Jogo Rápido são propostos e os conteúdos apresentados antes e depois, identificamos que a abordagem orientada pode limitar a generalização dos conceitos. Embora os alunos compreendam os princípios subjacentes, podem não ser desafiados a aplicá-los de forma independente em diferentes contextos, pois a abordagem tende a promover a repetição do conteúdo já fornecido pelo livro, resultando em uma mera replicação por parte do aluno.

Portanto, destaca-se a importância da interação dinâmica entre alunos, professores e o material didático, a fim de mediar efetivamente a atividade de ensino-aprendizagem. Essa interação é crucial para permitir que os alunos produzam saberes concernentes ao pensamento algébrico até atingirem o nível do pensamento padrão. Sugerimos que os educadores

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774 ISSN 1984-7505

aproveitem as propostas, reorganizando-as e invertendo a ordem conforme necessário, promovendo, assim, um ensino-aprendizagem mais eficiente do pensamento algébrico. Além disso, recomendamos que os professores busquem propostas adicionais, indo além do livro didático, e considerem uma linguagem mais próxima da cultura dos alunos (Radford, 2020).

Por fim, notamos que as propostas estão desorganizadas no livro didático. Para superar essa desorganização, acreditamos na importância de os docentes compreenderem as teorias que embasam a organização de suas ações e atividades didáticas com os estudantes, visando promover uma melhor compreensão conceitual por parte destes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 abr. 2023.

CARVALHO, J. A. M.; SILVA, K. K.; SILVA, L.A. D. M; SILVA, L. F. Caderno 4 (Matemática). In CABRAL, T G (org). MAXI: **Ensino Fundamental 2-Anos Finais- 7º Ano**, 1 ed.-São Paulo: Maxiprint, 2019.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexivas na Educação Matemática, in Bicudo, Maris Aparecida Viggiani (org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, p. 97, 1999.

JUNIOR, V. P.T. Uma reflexão sobre a história da álgebra a partir da filosofia de Wittgenstein. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 9, n. 3, p. e21076, 2021. https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.12619

KAPUT, J.; BLANTON, M.; MORENO, L. Algebra from a symbolization point of view. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Ed.) **Algebra in the early grades.** New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2005. p.19-55.

KAUARK, F.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da pesquisa**: guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.

LACERDA, S.M.; GIL, N. Desenvolvimento do pensamento algébrico e estudo de padrões e regularidades com crianças: perscrutando possibilidades para educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 103, n. 264, 22 ago. 2022. https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.103i264.5126

LOPES, T. B; FELIX, A. P. N.; SÁ, P. F. Análise Comparativa da Escolha da Operação em Questões Aditivas e Multiplicativas, Algébricas e Aritméticas. **Revista Areté**: Revista Amazônica de Ensino de Ciências, [S.l.], v. 18, n. 32, p. e22020, dez. 2022. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v18.n32.3727.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 9 ed. São Paulo: Atlas, 2021.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

MORAES, M. S. F.; COSTA, D. E.; MENDES, I. A. Obstáculos Epistemológicos Relativos ao Conceito de Limite Na Produção Acadêmica em História da Matemática. **Revista Areté:** Revista Amazônica de Ensino de Ciências, [S.l.], v. 17, n. 31, p. e22002, jul. 2022. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3717.

MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luís (Orgs.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais:** diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria-Histórico-Cultural. Editora Livraria da Física, 2021.

OLIVEIRA, D. P. A.; MOURA, R. A. de; PEROVANO, A. P. Reflexões sobre os poliedros de Platão em livros didáticos do ensino médio a luz da pesquisa historiográfica. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 1–10, 2023. https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/95

OTTE, Michael Friedrich. **A Realidade das Ideias**: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá: Editora da UFMT, 2012.

OTTE, M.F.; SANTANA, G.F.S.; PAULA, L.; BARROS, L.G.X. Razões para uma abordagem Semiótica na Educação Matemática. **Revista Prática Docente**, [S. l.], v. 4, n. 1, p. 24–43, 2019. https://doi.org/10.23926/RPD.2526-2149.2019.v4.n1.p24-41.id350

RADFORD, L. **Algebraic thinking and the generalization of patterns:** a semiotic perspective. In: North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME. Bergen University College. v. 1, 2006.

RADFORD, L. **Signs, gestures, meanings:** Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon – França, 2009.

RADFORD, L. Grade 2 students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (Ed.). **Early Algebraization.** Berlin: Springer-Verlag, 2011a. p. 303-322.

RADFORD, L. **Antes que outras incógnitas fossem inventadas:** investigações didáticas acerca dos métodos e problemas da álgebra italiana medieval. In: RADFORD, L. Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia. Livraria da Física. São Paulo, 2011b.

RADFORD, L.; EMPEY, H. Culture, knowledge and the self: mathematics and the formation of new social sensibilities in the renaissance and medieval Islam. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], p. 19, 2020.

SANTANA, Geslane Figueiredo da Silva. **A Complementaridade entre sentido e referência dos símbolos da Matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e em Matemática) – PPGECEM/ REAMEC, UFMT, Cuiabá, 2019.

SANTOS, F. C. F.; MORETTI, V. D. Práticas de formação para professores dos anos iniciais voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. **Paradigma,** [S. l.], v. 43, n. 1, p. 92-116, 2022. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p92-116.id1162

SILVA, P. E.; CURI, E. Análise da abordagem do pensamento algébrico no currículo ao longo do tempo. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23009, 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.14168

AGRADECIMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

COMO CITAR - ABNT
SANTANA, Geslane Figueiredo da Silva; COSTA, Dailson Evangelista; GONÇALVES, Tadeu Oliver. Níveis de pensamento algébrico (des)organizados no livro didático de Mato Grosso. **Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 19, n. 33, *e*23009, jan./dez., 2023. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774

COMO CITAR - APA
Santana, G. F. da S., Costa, D. E., Gonçalves, T. O. (2023). Níveis de pensamento algébrico (des)organizados no livro didático de Mato Grosso. *Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências*, *19*(33), *e*23009. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3774

HISTÓRICO
Submetido: 08 de agosto de 2023.
Aprovado: 16 de novembro de 2023.
Publicado: 30 de dezembro de 2023.
