

AS ATIVIDADES DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENFOQUE CTS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DE TEMAS

Modeling activities in mathematical education in the CTS approach: an approach from topics

Maria Rosana Soares¹

RESUMO: Aspectos relacionados à Modelagem Matemática e sua incorporação no enfoque Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS) vêm se desenvolvendo nos meios acadêmicos e escolares, a partir de temas da realidade. Assim, este artigo objetiva apresentar os resultados parciais e relevantes das atividades de Modelagem em Educação Matemática, no enfoque CTS, em um curso de Licenciatura em Matemática. Em relação aos procedimentos metodológicos, o estudo foi sustentado por análises bibliográficas e práticas, pesquisa qualitativa de cunho interpretativo e estudo de caso. As coletas de dados derivaram-se da observação, intervenção na pesquisa e dos dados analisados e extraídos: anotações, atividades dos sujeitos, registros, imagens, questionários e consulta ao Ministério da Saúde. Os resultados mostraram que a Modelagem no enfoque CTS é uma estratégia de ensino para aprendizagem da Matemática que propicia investigar, problematizar e transformar os temas extraídos da realidade em linguagem matemática, podendo-se chegar ao estudo e à compreensão do papel dos modelos matemáticos na sociedade, visto que, para isso, foram exploradas e expostas etapas e abordagens pedagógicas de Modelagem.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Modelagem. CTS. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT: Aspects related to Mathematical Modeling and its incorporation in the Science, Technology and Society (CTS) approach have been developing in the academic and scholastic circles, starting from reality themes. Thus, this article aims to the present partial and relevant results of Modeling Activities in Mathematics Education on the CTS approach in a Mathematics Degree course. Regarding methodological procedures, the study was supported by bibliographical and practical analyzes, using qualitative interpretive research and a case study. The data collections were derived from observation, intervention in the research and data analyzed and extracted from it: notes, activities done by subjects, records, images, questionnaires and consultation at the Ministry of Health. The results presented Modeling in the CTS approach as a teaching strategy for learning mathematics, allowing to investigate, problematize and transform the themes extracted from reality into mathematical language, being able to study and understand the role of the mathematical models in society, since, for this, we have explored and exposed pedagogical Modeling steps and approaches.

Keywords: Mathematical Education. Modeling. CTS. Degree in Mathematics.

Introdução

"Em anos recentes, os estudos em Educação Matemática também têm posto em evidência, como um caminho para se trabalhar a Matemática na escola, a ideia de *modelagem matemática*" (BRASIL, 2006, p. 84, grifos do autor), que "pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los

¹ Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), possui mestrado profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná de Ponta Grossa (UTFPR/PG) e duas especializações (*lato sensu*): Instrumentalização para o Ensino de Matemática pela UTFPR de Cornélio Procópio (UTFPR/CP) e Educação Profissional Integrada a Educação Básica na Modalidade Educação de Jovens e Adultos (UTFPR/CP): maryrosanasoares@gmail.com. Membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BRASIL, 2006, p. 84). Conforme Barbosa (2001, p. 46; 2003, p. 70), ela é "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade". Dessa forma, "com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural" (BASSANEZI, 2009, p. 38). Na Modelagem², os temas, as situações, os problemas e/ou os fenômenos podem ser abordados em salas de aula, em ambientes extraclasse e/ou em articulações das duas situações, permitindo trabalhar de forma multidisciplinar, interdisciplinar ou transdisciplinar.

A forma multidisciplinar é "uma abordagem que solicita a obtenção de informações para uma ou mais disciplinas e/ou ramos de conhecimento, sem interligações e modificações em seus aspectos conceituais e processuais" (SOARES, 2017, p. 45); a forma interdisciplinar é "uma abordagem que ocorre a partir de interações recíprocas entre duas ou mais disciplinas e/ou campos de conhecimento, com conexões e relações em seus aspectos conceituais e processuais" (SOARES, 2017, p. 45); a forma transdisciplinar é "uma abordagem que acontece a partir das interações globais entre várias disciplinas e/ou ramos de conhecimento, além da abordagem interdisciplinar, com cooperações e aprofundamentos superando seus aspectos conceituais e processuais" (SOARES, 2017, p. 45). Nisso, relacionam-se estudos e investiga-se certo contexto do objeto de estudo conforme a realidade inserida, com base em temas ou problemas reais, visto que a segunda abordagem é utilizada com mais frequência no ensino de Matemática, por exemplo, por meio do enfoque Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS). Com isso, se entende e se explica uma porção da realidade em uma linguagem matemática, focando os conhecimentos científico, erudito, matemático e transformador e os processos de ensino e aprendizagem.

Nessa conjuntura, a "perspectiva de Modelagem se conecta ao campo das relações CTS por meio de temas" (SILVEIRA, 2014, p. 9). "Com relação à escolha de temas para o trabalho, são estabelecidas discussões em torno das possibilidades de as salas de aula se configurarem em ambientes democráticos, evidenciando-se alguns problemas nessa fase da Modelagem" (SILVEIRA, 2014, p. 9). Desse modo, "um dos principais campos de investigação e ação social do movimento CTS tem sido o educativo" (PINHEIRO; SILVEIRA; BAZZO, 2007, p. 74). Assim sendo, sobre o campo de investigação que "comumente chamamos de 'enfoque CTS no contexto educativo', percebemos que ele traz a necessidade de renovação na estrutura curricular dos conteúdos, de forma a colocar ciência e tecnologia em novas concepções vinculadas ao contexto social" (PINHEIRO; SILVEIRA; BAZZO, 2007, p. 74). Por isso, os pesquisadores Pinheiro (2005), Soares (2012a, 2012b) e Silveira (2014) defendem a ideia de Modelagem no enfoque CTS para os processos de ensino e aprendizagem. Essa é uma das razões para se expor os principais resultados de parte das atividades de Modelagem realizadas em uma turma de licenciandos de Matemática, elucidando a seguinte questão: "Como podem ser desenvolvidas as atividades de Modelagem em Educação Matemática com base no enfoque CTS em um curso de Licenciatura em Matemática?", uma vez que: "para trabalhar Modelagem Matemática, é necessário levar o aluno a pensar, a pesquisar e a questionar as situações que lhes são impostas" (GOULART; NEUMANN; QUARTIERI, 2016, p. 83).

Modelagem Matemática no enfoque CTS

² A fim de evitar repetições textuais, são utilizados sem distinção os termos "Modelagem" e "Modelagem Matemática".

A Modelagem como compreensão da realidade é evidenciada da seguinte maneira:

A concepção de *modelagem matemática como representação* da realidade está relacionada a um dualismo, a uma perspectiva de dois-mundos. Por um lado, podemos operar com conceitos matemáticos como sendo parte do mundo das estruturas, como sugerido pelo formalismo. Por outro, podemos operar com a realidade do mundo empírico. Um modelo matemático se torna uma representação de parte dessa realidade. Decerto, tal representação não pode ser completa. Como poderíamos sonhar em fazer uma representação completa da realidade? Mas a linguagem matemática pode representar diferentes aspectos da realidade. As noções da teoria matemática selecionada podem se referir aos objetos empíricos, e as relações entre esses objetos podem ser descritas em termos de equações (SKOVSMOSE, 2007, p. 107, grifos do autor).

A Modelagem Matemática tem por interesse estruturar e representar os fatos empíricos de diferentes contextos sociais buscando transformar, modelar e evidenciar parte da realidade por meio dos conceitos matemáticos já conhecidos, assim como dos novos conceitos que serão discutidos e apreendidos. Conforme progride o desenvolvimento da Matemática, a Modelagem visa obter a compreensão da realidade por meio da implantação e do aprimoramento da relação entre os estudantes, o professor e os modelos matemáticos aplicados na sociedade.

Assim considerada, ela é identificada como algo que pode representar situações da realidade por meio de modelos matemáticos, embora não possa ser completa. Isso porque não é possível fazer uma representação total em relação aos aspectos científico, tecnológico e social, entretanto, a linguagem matemática permite explorar, discutir e expressar diversos componentes de uma realidade parcial e específica.

Nessa perspectiva, Pinheiro (2005, p. 73) explica o seguinte:

[...] a Modelagem Matemática poderá promover um ensino-aprendizagem que forneça ao aluno habilidade de discussão sobre assuntos relacionados com a ciência, a tecnologia e a implicação social da matemática nos aspectos ligados à sua área de atuação, enfim, que o possa levar a uma autonomia profissional crítica. Por intermédio da modelagem, o aluno percebe que conhecer a matemática não representa apenas ter domínio de técnicas ou de suas aplicações, mas sim na sua dimensão de conhecimento humano. Tal conhecimento envolve, portanto, o aspecto de análise, compreensão e comunicação da realidade.

A Modelagem Matemática permite tratar sobre assuntos científicos e tecnológicos explicitando o papel social da Matemática, como também desenvolver o ensino dinâmico para a aprendizagem tendo como base temas da realidade. Assim, ela é um processo dinâmico que envolve a representação de situações reais mediante o uso da Matemática e de suas estratégias de ação, buscando modelar e compreender problemas da realidade.

Com isso, "o processo da Modelagem Matemática é dinâmico e permite ao estudante criar, ele pode também inventar algoritmos de resolução ou criar algum procedimento matemático, advindo de sua vida fora da escola, para resolver determinadas situações" (CALDEIRA, 2009, p. 46). Na concepção de Skovsmose (2007, p. 59), a integração da

Modelagem com a tecnologia precisa de uma distinção adicional, pois é necessário lidar com três tipos de conhecimentos relacionados a esse processo dinâmico:

- 1) O próprio conhecimento matemático;
- 2) O conhecimento tecnológico que é o conhecimento sobre constituir e usar um modelo matemático, o qual chama-se de conhecimento programático;
- 3) O conhecimento reflexivo, que precisa ser interpretado como um referencial teórico mais conceitual, ou meta-conhecimento, para que se possam discutir a natureza dos modelos e o critério usado em sua construção, aplicação e avaliação.

Para desenvolver e validar um modelo matemático são necessários os conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo. Com isso, professor e estudantes agrupados buscam investigar a natureza do estudo proposto, visto que a Modelagem Matemática propicia a compreensão dos aspectos reais, permite a obtenção de novas descobertas e a realização de previsões, nos trabalhos efetivados diante do objeto de estudo, para a sociedade contemporânea.

Procedimentos metodológicos

Este artigo trata de atividades de Modelagem e da relação desta com o enfoque CTS, a partir de temas, provenientes de uma pesquisa que objetivou "investigar as contribuições que a Modelagem Matemática pode propiciar como estratégia de ensino e aprendizagem para os futuros professores de Matemática" (SOARES, 2012b, p. 27). Para isso, recorreu-se a Lincoln e Guba (1985), Miles e Huberman (1994), André (1998), Bogdan e Biklen (1994), Denzin e Lincoln (2006) e Lüdke e André (2012) e utilizou-se das seguintes estratégias de investigação: pesquisa qualitativa, bibliográfica, aplicada e interpretativa, tratando de um estudo de caso (CRESWELL, 2010; 2014) e investigando o *como* do processo.

Para tanto, foram desenvolvidas várias atividades teóricas e práticas sobre e por meio da Modelagem em um 4º ano de Licenciatura em Matemática (2011) de uma Universidade Estadual do Paraná, na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, em tempo normal de aulas, menos na época de férias e na semana de avaliação. As atividades apresentaram um total de seis etapas, que são apresentadas neste artigo mais adiante, e fizeram uso de 16 horas-aula (h/a) em sala de aula e seis (h/a) extraclasse, com orientação por *e-mail*, articulando isso tudo. Inicialmente, o *corpus* foi composto por 30 futuros professores de Matemática (FPs) regularmente matriculados, entretanto, devido a desistências e/ou faltas temporárias de alguns, ocorreu uma participação efetiva mínima de 23 e máxima de 25 FPs. Os universitários se organizaram e se subdividiram em cinco grupos autonomamente: G1 (5 FPs); G2 (5 FPs); G3 (7 FPs); G4 (6 FPs) e G5 (7 FPs). Eles foram identificados por: AG1; AG2; AG3; AG4 e AG5. Assim, G1, por exemplo, significa "primeiro grupo" e AG1 "futuros professores do primeiro grupo".

Em relação à coleta de dados, esta foi investigada e organizada pelos envolvidos e abordada juntamente com os futuros professores agrupados para o desenvolvimento das atividades de *Modelagem*, em virtude de suas inexperiências e conhecimentos mínimos no assunto, bem como visando motivá-los e encorajá-los à identificação, compreensão e aplicação do assunto. Assim, as atividades práticas de Modelagem fizeram uso de dados e informações de fontes como o Ministério da Saúde e dois jornais da biblioteca *on-line*, *G1-Globo* e *Uol*, de acordo com as referências apresentadas neste artigo. Ademais, os membros dos grupos receberam materiais impressos visando proporcionar envolvimentos e discussões

sobre e por meio da Modelagem e fizeram uso de materiais audiovisuais como *softwares*, *Calc* e *Excel*.

Atividades de Modelagem Matemática no enfoque CTS a partir de temas

Soares (2012a; 2012b) sugere que as atividades de Modelagem e sua relação no enfoque CTS, a partir de temas reais, podem ser concretizadas conforme a Figura 1:

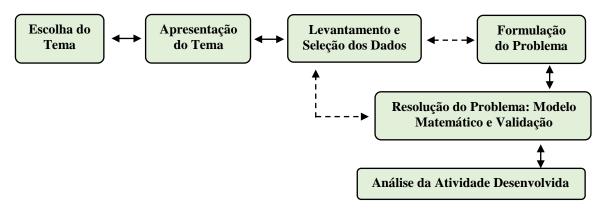


Figura 1 – Dinâmica para desenvolver o processo de Modelagem Matemática Fonte: Soares (2012a, p. 43; 2012b, p. 160).

As setas de duas direções, contínuas ou não, expressam que cada etapa de Modelagem possui uma vinculação com as demais etapas. Quanto às setas de duas direções não contínuas horizontalmente ou verticalmente, significam que há duas possibilidades no processo de Modelagem. A primeira possibilita realizar o levantamento e a seleção dos dados e, depois, a formulação do problema, enquanto que a outra possibilita realizar o processo inverso, isto é, pode-se formular o problema e posteriormente efetuar o levantamento e seleção dos dados. As 3ª e 4ª etapas da atividade de Modelagem são flexíveis e modificáveis, cabendo aos docentes, pesquisadores, estudantes e/ou universitários analisar o processo apropriado para alcançar o objetivo proposto e desenvolver os conceitos matemáticos.

Nessa condição, as duas setas pontilhadas unidas denotam que, caso a resolução do problema não seja considerada plausível diante do processo da Modelagem, ou seja, se não for vista como aceitável ou eficiente para resolver o problema formulado, é possível retomar o processo a partir da 3ª etapa escolhida inicialmente. Isso de acordo com o levantamento e a seleção dos dados ou a formulação do problema, com o propósito de realizar as simplificações e/ou modificações admissíveis. Além disso, segundo os objetivos constituídos e as realidades escolares e/ou universitárias, uma determinada atividade de Modelagem pode ser efetivada de acordo com todas as etapas de sua dinâmica ou não – por exemplo, a referida atividade pode ser iniciada a partir do levantamento e da seleção dos dados ou da formulação do problema, visando o ensino para a aprendizagem matemática.

Soares (2012a, p. 42-110; 2012b, p. 161-213) orienta e sugere uma dinâmica para realizar as atividades de Modelagem e sua relação no enfoque CTS a partir de temas:

• 1ª Etapa – Escolha do Tema: é o que se pretende pesquisar e investigar. O tema a ser definido busca analisar uma situação da realidade e, nesta etapa, formula-se o problema posteriormente. O tema escolhido envolve alguma área de estudo, como saúde, meio ambiente, esporte, agricultura, agropecuária, engenharia, fenômenos, economia, política, comércio, indústria, educação, ensino, ciência, tecnologia, sociedade e universo, entre outras.

Assim, inicialmente, ele não apresentará conexão direta com a Matemática, mas é importante que o professor e/ou os estudantes agrupados escolham um tema que desperte interesse e motivação e que seja fácil e/ou prático para obter informações e dados, assim como para fazer a formulação, investigação, análise e resolução dos problemas.

No "início de uma modelagem se faz a *escolha de temas*. Faz-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser preferencialmente abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções" (BASSANEZI, 2009, p. 45).

Os sujeitos agrupados selecionaram e apresentaram os temas de interesse: G1: dengue; G2: saúde; G3: a problemática dos fumantes; G4: culinária; G5: área do esporte e G6: futebol. No caso do tema "dengue", eles tiveram uma motivação comum e identificaram sua relevância para a realização das atividades de Modelagem, já que é um assunto polêmico e atual sobre uma doença que acomete o ser humano, transmitida pelo mosquito Aedes aegypti, que pode ser encontrado em todas as regiões do país, sobretudo, nas regiões tropicais e subtropicais. Conforme destacaram: "Esse tema é muito importante para todas as pessoas!" (AG1); "afetava a saúde das pessoas!" (AG2, AG3 e AG4).

• 2ª Etapa – Apresentação do Tema: é pesquisar, sintetizar e explicitar a importância do tema escolhido. A apresentação visa discutir e enfatizar a relevância do tema selecionado, buscando o envolvimento e a valorização dos estudantes, pois quanto mais interesse e interações em relação ao tema, maiores as possibilidades de se obter um resultado aceitável da prática. Para isso, é necessário investigar textos e trabalhos da área escolhida, por meio de pesquisas bibliográficas em livros, revistas e jornais, que podem ser realizadas em bibliotecas físicas e/ou *on-line*, via pesquisas de campo e/ou entrevistas e outros meios. Isso pode ser organizado pelo professor ou pelos estudantes agrupados e pode ser algo conciso ou abrangente, dependendo da natureza do tema e da disponibilidade que se tem.

Esta etapa foi organizada pela pesquisadora através de consulta ao Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a, 2011b e 2011c) e exposta aos licenciandos para refletirem e discutirem sobre a importância do tema "dengue", o que possibilitou explicitar o seguinte a respeito do tema em questão: áreas propícias para seu desenvolvimento, características físicas do mosquito e sua picada, reprodução, modo de vida, ciclo e modo de transmissão, sintomas e tratamentos. Foram apresentadas, por exemplo, as características físicas do mosquito e as medidas para evitar a picada do *Aedes aegypti*, como o uso de mosquiteiros, espirais ou vaporizadores elétricos, repelentes e/ou telas (BRASIL, 2011b): "Professora! Esse mosquito possui pernas longas e com manchas brancas, e há medidas para evitar suas picadas, uma delas é o repelente" (AG1).

• 3ª Etapa – Levantamento e Seleção dos Dados: é o que se pretende pesquisar, investigar e desenvolver. Conforme os objetivos propostos, conceitos matemáticos a serem desenvolvidos e recursos disponíveis, pode-se fazer o levantamento e a seleção dos dados e, posteriormente, a formulação do problema ou vice-versa (as 3ª e 4ª etapas podem ser invertidas). Para isso, pesquisa-se fazendo um levantamento dos dados, os quais são adequados às análises qualitativas e quantitativas sobre o tema escolhido. Seguidamente, analisam-se e exploram-se os dados obtidos por meio da seleção, isto é, da simplificação dos dados mais importantes e da eliminação dos menos relevantes (variáveis), com a identificação das possíveis investigações para os problemas a serem resolvidos (hipóteses) e a organização, sintetização e/ou categorização dos dados, por exemplo, em tabulação, se for necessário. Isso pode ser feito pelo professor e/ou estudantes agrupados, sendo fundamental analisar o envolvimento e a motivação dos sujeitos para desenvolver o processo, além da preparação docente para essa orientação.

"Uma vez escolhido o tema, o próximo passo é buscar informações relacionadas com o assunto. A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas" (BASSANEZI, 2009, p. 46), por exemplo, recorrendo à pesquisa bibliográfica e utilizando materiais especializados disponíveis em bibliotecas físicas e/ou *on-line*. Todavia, "até o momento, nós não desenvolvemos nenhuma atividade de Modelagem Matemática, assim temos dificuldades em pesquisar, fazer análises, levantar dados e selecioná-los, pois fazer Modelagem é difícil, não é simples" (AG5).

Para motivar os sujeitos a investigarem as atividades de Modelagem, a pesquisadora apresentou o levantamento e a seleção dos casos notificados, casos graves e óbitos por dengue. Em virtude do volume de dados, foram elaboradas duas tabelas, que seguem abaixo.

A Secretaria de Vigilância em Saúde do Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a) registrou o total de casos notificados de dengue no país durante a semana epidemiológica, da 1ª à 26ª semana de 2011, isto é, fazendo um balanço da dengue entre 2 de janeiro de 2011 e 2 de julho de 2011 (6 meses), conforme cada região do país, como mostra a Tabela a seguir:

Tabela 1 – Casos notificados de dengue por regiões

Semana Epidemiológica	Norte	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste
1. Janeiro	23.968	13.426	19.453	5.588	9.595
2. Fevereiro	34.704	24.421	43.558	13.562	10.563
3. Março	32.859	48.181	87.991	21.884	13.056
4. Abril	10.218	39.410	106.255	11.243	10.202
5. Maio	6.186	24.988	71.457	4.525	6.846
6. Junho	2.776	6.871	9.593	128	2.159
Total	110.711	157.297	338.307	56.930	52.421

Fonte: Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a).

A Secretaria de Vigilância em Saúde do Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a) também registrou os totais de óbitos confirmados por dengue no país, sendo eles da mesma semana epidemiológica de 2011, como mostra a Tabela a seguir:

Tabela 2 – Óbitos confirmados de dengue por regiões (2011)

Regiões	Óbitos Confirmados por Dengue
1. Norte	40
2. Nordeste	100
3. Sudeste	142
4. Sul	13
5. Centro-Oeste	13
Total	308

Fonte: Ministério da Saúde (BRASIL, 2011a).

• 4ª Etapa – Formulação do Problema: é o que se pretende pesquisar, investigar e resolver. A partir do levantamento e da seleção dos dados sobre o tema escolhido se definem os problemas para resolução, ou seja, os problemas são elaborados por meio das situações, dados ou fenômenos da realidade, de modo claro. Ou, ainda, primeiramente, é possível formular os problemas e depois efetuar o levantamento e a seleção dos dados para fazer suas resoluções (as 3ª e 4ª etapas podem ser invertidas). Nesta etapa, elaboram-se perguntas com problematizações que tenham alguma relação com o tema selecionado, variáveis envolvidas e/ou hipóteses levantadas, as quais podem ser realizadas pelo professor e/ou pelos estudantes agrupados. Assim, é essencial refletir sobre as relações existentes apresentadas nos dados

organizados, sintetizados e/ou categorizados e sobre as possibilidades, para problematizar e fazer suas investigações, análises e resoluções posteriormente.

Nessa perspectiva, "um problema se constitui em uma pergunta científica quando explicita a relação entre as variáveis ou fatos envolvidos no fenômeno" (BASSANEZI, 2009, p. 28). A partir das etapas 1, 2 e 3 expostas anteriormente neste artigo, o Quadro 1 a seguir apresenta a formulação de problemas para os casos notificados e óbitos por dengue realizada pelos futuros professores de Matemática:

Quadro 1 – Formulação de problemas para os casos notificados e óbitos por dengue

Quadro 1 – Formulação de problemas para os casos notificados e obitos por dengue				
Casos notificados de dengue				
Formulação do	- Que modelo matemático representa a relação entre a semana epidemiológica e o			
Problema 1	número de casos notificados de dengue para a região Norte? (AG1)			
Formulação do	- Qual é a relação entre a semana epidemiológica e os casos notificados de dengue para a			
Problema 2	região Nordeste? Que modelo matemático representa essa relação? (AG2)			
Formulação do	- Qual é a relação entre a semana epidemiológica e os casos notificados de dengue para a			
Problema 3	região Sudeste? Que modelo matemático representa essa relação? (AG3)			
Formulação do	- Qual é a relação existente entre a semana epidemiológica e a região Sul do país? Que			
Problema 4	modelo matemático pode expressar essa relação? (AG4)			
Formulação do	- Qual é a relação que há entre os casos notificados da semana epidemiológica e a região			
Problema 5	Centro-Oeste? Que modelo matemático pode descrever essa relação? (AG5)			
Formulação do	- Qual é a relação que há entre a semana epidemiológica e a proporção de mortes para a			
Problema 6	região Centro-Oeste? Que modelo matemático pode expressar essa relação? (AG5)			
Formulação do	- Qual é a relação entre a região Centro-Oeste e a proporção de mortes? Que modelo			
Problema 7	matemático pode expressar essa relação? (AG5)			
	Óbitos por dengue			
Formulação do	- Que modelo matemático representa a relação entre as regiões brasileiras e os óbitos			
Problema 8	confirmados por dengue? (AG1)			
Formulação do	- Qual é a relação entre as regiões brasileiras e os óbitos confirmados por dengue? Que			
Problema 9	modelo matemático representa essa relação? (AG2)			
Formulação do	- Qual é a relação entre as regiões do país e os óbitos confirmados por dengue? Que			
Problema 10	modelo matemático representa essa relação? (AG3)			
Formulação do	- Qual é a relação Matemática presente entre as regiões brasileiras e o número de casos			
Problema 11	de óbitos confirmados por dengue? (AG4)			
Formulação do	- Qual é a relação entre as regiões do país e a proporção de óbitos por dengue? Que			
Problema 12	modelo matemático pode representar essa relação? (AG5)			
Formulação do	- Qual é a relação entre os óbitos por dengue e a proporção desses casos? Que modelo			
Problema 13	matemático pode representar essa relação? (AG5)			

Fonte: Soares (2012b, p. 178-180).

Conforme o volume de problemas formulados, vale expor seus resultados e discussões conforme o primeiro problema exposto no Quadro 1.

• 5ª Etapa — Resolução do Problema — Modelo Matemático e Validação: é desenvolver, explorar e solucionar o problema formulado, o que permite elaborar um modelo matemático e analisar sua aceitação ou não. Com as ferramentas e recursos reais, matemáticos, didáticos e/ou computacionais, o docente e/ou estudantes agrupados visam resolver o problema. O Modelo Matemático é resultante da investigação, análise, exploração e transformação de problematizações das situações, dados ou fenômenos da realidade em linguagem matemática. Por meio dele são realizadas a organização, a representação, a resolução e a explicitação de matematizações, visando o ensino e a aprendizagem de Matemática, via processo de obtenção da solução do problema formulado. Esse modelo pode ser expresso por meio de um conjunto

de símbolos, estruturas e relações matemáticas, como gráficos, tabelas, funções, sistemas, equações, expressões matemáticas, diagramas, figuras geométricas, representações estatísticas e/ou físicas, entre outros conceitos. Em sua elaboração, analisam-se as hipóteses de resolução e definem-se as variáveis independentes e dependentes e suas representações adequadas. Aqui, exploram-se os conceitos matemáticos que devem estar no programa da disciplina ou não, pois a formulação e a resolução do problema podem abranger um conceito matemático que não está inserido nele, assim como a realização da atividade de Modelagem depende de objetivos a serem atingidos, realidades escolares e/ou universitárias, conhecimentos, competências, durabilidades e recursos disponíveis. A Validação do Modelo Matemático pode ou não ser feita conforme a finalidade do objeto de estudo, mas é de suma importância, pois possibilita analisar a relevância ou não do modelo matemático obtido ao compará-lo com os dados (reais e/ou matemáticos). Quando o modelo matemático não for considerado válido, ou seja, não se aproximar da situação, dado ou fenômeno que o originou, pode-se reiniciar o processo, conforme já foi feito a partir das 3^a ou 4^a etapas de Modelagem (isto é, a partir do levantamento e seleção dos dados ou da formulação do problema), para fazer ajustes na coleta dos dados, formulação dos problemas, simplificações e/ou modificações plausíveis.

Os membros dos grupos foram estimulados a desenvolverem os modelos por meio da exploração de dois *softwares*: "Como faz para gerar um modelo matemático no *Calc*?" (AG2). E outros sujeitos afirmaram: "Ah! Nós acreditamos que o *Excel* pode ser mais fácil que o *Calc*, principalmente para fazer o gráfico." (AG3). Ademais: "Eu sei fazer o gráfico no *Excel*, mas não no *Calc*!" (AG5). Os licenciandos do G1 fizeram o seguinte comentário: "Olhe aqui, professora, nosso modelo no *Calc*, mas a linha do gráfico não ficou boa"; por outro lado: "nosso grupo conseguiu obter o modelo matemático pelo *Excel*!" (AG5), uma vez que: "o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente" (BASSANEZI, 2009, p. 29), enquanto que, sobre a validação: "o problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis — o simples confronto com os dados empíricos pode não bastar" (BASSANEZI, 2009, p. 30). Para tanto, segue a primeira formulação de problema e sua resolução:

- Que modelo matemático representa a relação entre a semana epidemiológica e o número de casos notificados de dengue para a região Norte? (AG1).

O modelo gerado para a região Norte é uma função polinomial de quinto grau (ver Figura 2):

$$y = -875.1x^5 + 15111x^4 - 95594x^3 + 268268x^2 - 324439x + 161498$$
 (1)

O modelo obtido (Figura 2) visa solucionar o problema formulado ao evidenciar a relação existente entre a semana epidemiológica e o número de casos notificados de dengue na região Norte e o papel sociocultural da Matemática em temas reais.

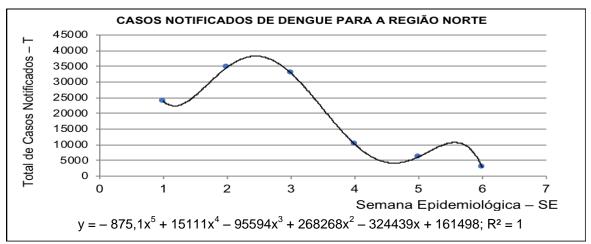


Figura 2 – Modelo matemático para a região Norte: casos notificados de dengue Fonte: Soares (2012a, p. 66; 2012b, p. 189).

Para tanto, segue a validação feita por AG1:

Tabela 3 – Validação do modelo matemático para a região Norte: casos notificados de dengue

	3	1 0			U
Número – N	Semana	Total de Casos	T Obtido no	Erro do	Erro do
	Epidemiológica – SE	Notificados - T	Modelo	Modelo	Modelo (%)
1	Janeiro	23.968	23.968,9	0,9	0,00081%
2	Fevereiro	34.704	34.712,8	8,8	0,00795%
3	Março	32.859	32.896,7	37,7	0,03405%
4	Abril	10.218	10.327,6	109,6	0,09900%
5	Maio	6.186	6.440,5	254,5	0,22988%
6	Junho	2.776	3.286,4	510,4	0,46102%
	Total	110.711	111.632,9	921,9	0,8327086%

Fonte: Soares (2012a, p. 69; 2012b, p. 190).

Obtém-se a validação do modelo ao checar os resultados alcançados para os casos notificados de dengue com os dados reais. Com isso, o erro estimado para o modelo é mínimo, pois é abaixo de 0,47%, enquanto que a margem estimada de erro geral é abaixo de 0,84%. Assim, a função polinomial obtida possui boa proximidade com os casos notificados de dengue para a região.

Todos os modelos obtidos, conforme o Quadro 1, expuseram $R^2 = 1$, isto é, coeficiente de determinação do modelo igual a um, mostrando aproximações com os dados reais e que são apropriados para as resoluções e soluções dos problemas dos casos investigados.

• 6ª Etapa — Análise da Atividade Desenvolvida: é explorar, discutir e evidenciar as principais considerações e/ou conclusões sobre toda a atividade de Modelagem Matemática desenvolvida. Os estudantes agrupados fazem a análise, que pode ser descrita e/ou apresentada oralmente por meio de trabalhos, relatórios ou seminários. Aqui, analisam-se os resultados obtidos na resolução do problema, a aplicação do modelo matemático na sociedade, a importância de se pesquisar e aprender a Matemática por meio da Modelagem, os conceitos matemáticos trabalhados e os desafios, resistências, vantagens e/ou contribuições que eles obtiveram com a prática aplicada, entre outros itens. A análise permite estimular o espírito crítico, reflexivo, ativo e inovador.

Todos os futuros professores agrupados expuseram suas opiniões sobre esta etapa. Para esclarecer, seguem algumas concepções de AG1, conforme esclarece Soares (2012b, p. 214):

[...] Para nós foi muito interessante obter a função, criar fórmulas no Excel, reconhecer quando o modelo pode ser aceito ou não por meio do erro percentual. [...] Na nossa educação básica os professores só abordavam fórmulas na disciplina de Matemática, e a Modelagem em nossa formação é fundamental, pois possibilita reconhecermos que o mais importante não é trabalhar com fórmulas em si, e sim com problemas a partir de situações/temas reais (AG1).

Para ilustrar, com a intenção de atingir os objetivos, as atividades de Modelagem permitiram explorar e evidenciar os seguintes conceitos matemáticos:

Quadro 2 – Conceitos matemáticos desenvolvidos nas atividades de Modelagem Matemática (continua)

Conceitos básicos	O que foi desenvolvido nas atividades			
Números Naturais	Operações com números inteiros			
Números Racionais	Operações com números decimais			
Números Irracionais	Número "e" – Noções do número de Euler			
Conjuntos Numéricos	Intervalos			
Funções	 Domínio função – Variável independente – x; 			
	• Funções polinomiais: 1°, 4° e 5° grau;			
	Função linear e Função crescente;			
	• Gráfico das funções polinomiais: 1°, 4° e 5° grau;			
	 Imagem da função – Variável dependente – y; 			
	Máximo e mínimo da função.			
Grandezas Proporcionais	Grandezas diretamente proporcionais;			
	Regra de três simples.			
Matemática Financeira	Porcentagem			
Matrizes	Representação genérica da matriz – número de casos de dengue tabulados			
Módulo	Módulo de um número real			
Polinômios	Expressões algébricas;			
	Equações polinomiais ou algébricas;			
	Valor numérico de um polinômio.			
Potência	Potência de um número real com expoente natural ou inteiro negativo			
Razão e Proporção	Aplicações de razão e proporção;			
	Propriedade fundamental da proporção.			

Quadro 2 - Conceitos matemáticos desenvolvidos nas atividades de Modelagem Matemática

(conclusão)

	(conclusio)			
Geometria Analítica	Coeficiente angular e linear da reta;			
	Distância entre dois pontos da reta;			
	Ponto médio da reta;			
	Sistema Cartesiano Ortogonal:			
	– plano cartesiano e seus quadrantes;			
	– par ordenado e coordenada;			
	– reta x (eixo das abscissas) e reta y (eixo das ordenadas);			
	– intersecção das retas x e y (origem).			
Estatística	Análise, interpretação e compreensão dos dados;			
	Construção e análise de tabelas e gráficos no Excel;			
	• Erro estimado – modelo matemático para os casos de dengue;			
	Formulação de problemas;			
	• Identificação das possíveis investigações dos problemas (hipóteses);			
	 Levantamento e seleção de dados; 			
	 Organização de informações e dados em tabelas e gráficos no Excel; 			
	Simplificação das informações e dados (variáveis).			

Fonte: Soares (2012a, p. 110; 2012b, p. 219).

Algumas contribuições obtidas com a aplicação da proposta de Modelagem

Para Soares (2012b), a Modelagem proporcionou vários desafios e contribuições aos futuros professores na realização de suas atividades, entre os quais temos o seguinte:

Quadro 3 – A Matemática sem ou com conexões cotidianas

MATEMÁTICA SEM CONEXÕES	MATEMÁTICA COM CONEXÕES		
COTIDIANAS	COTIDIANAS		
A Matemática não faz relação com outras áreas e/ou	A Matemática faz relação com outras áreas e/ou		
disciplinas.	disciplinas.		
Estimula o trabalho para fórmulas e resolução de	Estimula o trabalho para pesquisas e investigações da		
exercícios de Matemática.	Matemática.		
Os alunos são passivos.	Os alunos são autônomos.		
Os assuntos partem de situações abstratas.	Os assuntos partem de situações concretas.		
Os conceitos matemáticos apresentam sequências	Os conceitos matemáticos não apresentam sequências		
para aplicá-los.	para aplicá-los.		
Os problemas já estão formulados.	Os problemas são formulados de acordo com o tema		
	da realidade.		
Os processos de ensino e aprendizagem são rígidos.	Os processos de ensino e aprendizagem são flexíveis.		
O professor é autoritário.	O professor é mediador e orientador.		
O processo é sistêmico.	O processo é dinâmico.		

Fonte: Soares (2012b, p. 238).

Além disso, a pesquisa de Soares (2012a; 2012b) obteve outras contribuições, como a exposição de abordagens pedagógicas para a realização do processo da Modelagem:

Quadro 4 – Abordagens pedagógicas para desenvolver o processo da Modelagem Matemática

ETAPAS DE	Abordagem	Abordagem	Abordagem	Abordagem	Abordagem
MODELAGEM	Pedagógica	Pedagógica	Pedagógica	Pedagógica	Pedagógica
MATEMÁTICA	1	2	3	4	5
Escolha do Tema	Professor	Professor	Professor/	Professor/	Estudantes
			Estudantes	Estudantes	agrupados
			agrupados	agrupados	
Apresentação do	Professor	Professor	Professor/	Professor/	Estudantes
Tema			Estudantes	Estudantes	agrupados
			agrupados	agrupados	
Levantamento e	Professor	Professor/	Professor/	Estudantes	Estudantes
Seleção de dados		Estudantes	Estudantes	agrupados	agrupados
		agrupados	agrupados		
Formulação do	Professor	Professor/	Professor/	Estudantes	Estudantes
Problema		Estudantes	Estudantes	agrupados	agrupados
		agrupados	agrupados		
Resolução do	Professor	Professor/	Professor/	Estudantes	Estudantes
Problema: modelo		Estudantes	Estudantes	agrupados	agrupados
matemático e		agrupados	agrupados		
validação					
Análise da Atividade	Professor/	Professor/	Professor/	Estudantes	Estudantes
Desenvolvida	Estudantes	Estudantes	Estudantes	agrupados	agrupados
	agrupados	agrupados	agrupados		

Fonte: A autora (2018).

Abordagem Pedagógica 1: o docente expõe, discute e explora com os estudantes agrupados uma atividade de Modelagem Matemática que já foi estudada e realizada. Assim, os sujeitos refletem, analisam e explicitam as principais considerações sobre toda a atividade de Modelagem desenvolvida, a qual pode ser feita em uma ou duas horas-aula regulares, extraclasse e/ou em uma articulação das duas situações.

Abordagem Pedagógica 2: o professor escolhe um tema e sintetiza sua importância e, posteriormente, orienta os estudantes agrupados a um encaminhamento viável para realizar o levantamento e a seleção de dados e, também, a formulação do problema. Estas duas etapas de Modelagem são flexíveis e alteráveis, cabendo ao docente mediar, analisar e discutir com os estudantes agrupados qual etapa é cabível para realizar primeiramente e direcioná-los adequadamente para atingir o objetivo estabelecido. Seguidamente, os estudantes agrupados são motivados e orientados a obterem respostas para o problema formulado, bem como a analisarem e a explicitarem a atividade desenvolvida, uma vez que esta abordagem é de natureza curta e pode ser feita em alguns dias ou semanas no tempo regular de aula e/ou além dela.

Abordagem Pedagógica 3: em todo o processo da Modelagem, desde a escolha do tema até a análise da atividade, o professor orienta os estudantes agrupados por meio de uniões, conexões, indagações e motivações para realizar a dinâmica do processo de Modelagem. O docente é o orientador e o mediador do processo e quando necessário pode organizar e discutir alguma etapa com a finalidade de estimular os estudantes a atividades dessa natureza. Os sujeitos agrupados são responsáveis pela realização e apresentação dos resultados das atividades de Modelagem realizadas. Esta abordagem pode acontecer por vários dias ou semanas em durabilidade normal de aula ou não.

Abordagem Pedagógica 4: o professor orienta os estudantes agrupados para escolher um tema e sintetizar sua importância. Sequentemente, ele os incentiva a fazer o levantamento,

a seleção de dados e a formulação do problema, uma vez que essas etapas de Modelagem são relativas e variáveis, sendo que compete aos participantes analisarem qual dessas duas etapas é cabível realizar inicialmente. Assim, os estudantes agrupados são assessorados a dirigirem, explorarem e resolverem as demais etapas da dinâmica do processo de Modelagem, visto que esta abordagem pode acontecer em diferentes dias ou semanas nas aulas regulares, extraclasse e/ou em uma relação das duas situações.

Abordagem Pedagógica 5: os estudantes agrupados são pesquisadores, organizadores e responsáveis por investigar, analisar, estudar, explorar, inventariar, desenvolver e explicitar a dinâmica do processo de Modelagem, que pode acontecer em diversos dias, semanas ou meses no período regular de aula e/ou fora da sala de aula.

Considerações finais

No início deste artigo visou-se responder a seguinte questão: "Como podem ser desenvolvidas as atividades de Modelagem em Educação Matemática com base no enfoque CTS em um curso de Licenciatura em Matemática?" Esta questão foi respondida quando se atingiu o objetivo, a partir de análises bibliográficas e práticas, da pesquisa qualitativa de cunho interpretativo e do estudo de caso. As coletas de dados foram realizadas por meio da observação, intervenção na pesquisa e análise de dados: Ministério da Saúde, anotações, registros, questionários, imagens e atividades, uma vez que "a estratégia aplicada possibilitou aprendizado eficaz, ou seja, contribuições aos licenciandos tanto para o entendimento desta alternativa pedagógica de pesquisa quanto para as futuras práticas docentes" (SOARES, 2012b, p. 242).

A Modelagem em sala de aula pode ser inserida por meio de uma abordagem multidisciplinar, interdisciplinar ou transdisciplinar, pois permite que conteúdos sejam trabalhados tendo como base temas da realidade, com aplicação cotidiana e explorando as relações entre as disciplinas, desenvolvendo o papel da Matemática por meio das aplicações de CTS. Isso permite aguçar o interesse do sujeito pelo assunto estudado e possibilita a aquisição de conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo. Ademais, as atividades de Modelagem se relevam vitais na formação dos professores de Matemática ou na educação básica, dado seu processo dinâmico que visa melhoras na aprendizagem Matemática.

A Modelagem no enfoque CTS é uma estratégia de ensino para a aprendizagem da Matemática que envolve um processo dinâmico, que propicia investigar, problematizar e transformar os temas extraídos da realidade em linguagem Matemática, bem como estudar e compreender o papel dos modelos matemáticos na sociedade; para isso, foram exploradas e expostas etapas e abordagens pedagógicas de Modelagem.

Referências

ANDRÉ, M. E. D. A. Etnografia da prática escolar. 2. ed. Campinas: Papirus, 1998.

BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática? **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.

_____. **Modelagem matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho de Rio Claro, Rio Claro, 2001.

_____. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. v. 2.

_____. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. **Balanço dengue**. Semana Epidemiológica, 1 a 26 de 2011. Coordenação Geral do Programa Nacional de Controle da Dengue. Brasília: Portal da Saúde, 2011a. Disponível em: http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/informe_dengue_072011.pdf. Acesso em: 12 jul. 2011.

_____. **Dengue**: prevenção. Brasília: Portal da Saúde, 2011b. Disponível em: http://portal.saude.gov.br/portal/saude/visualizar_texto.cfm?idtxt=23624&janela=1. Acesso em: 20 jul. 2011.

_____. **Dengue**: sintomas. Brasília: Portal da Saúde, 2011c. Disponível em: http://portal.saude.gov.br/portal/saude/visualizar_texto.cfm?idtxt=23620&janela=1. Acesso em: 12 jul. 2011.

CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática: um outro olhar. **Alexandria**, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

_____. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. Tradução de Sandra Mallmann da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. Tradução de Sandra Regina Netz. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

GOULART, E. B.; NEUMANN, S. M.; QUARTIERI, M. T. Formação continuada e modelagem matemática: contribuições para a melhoria no ensino de matemática. **Areté** – **Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, v. 9, n. 18, p. 72-85, jan.-jul. 2016.

LIMA, S. Mortes por dengue caem 44% no 1º semestre de 2011 em relação a 2010. Ciência e Saúde. Brasília, 06 jul. 2011, 16h34. G1-Globo. Disponível em: http://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2011/07/dengue-causou-310-mortesno-1-semestre-deste-ano-no-pais.html>. Acesso em: 11 jul. 2011.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. Naturalistic inquiry. Newbury Park: Sage, 1985.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2012.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. N. **Qualitative data analysis**: an expanded sourcebook. 2. ed. Thousand Oaks: Sage, 1994.

PIMENTEL, C. Dengue é um dos principais problemas de saúde pública no Brasil, segundo revista inglesa: prevenção, sintomas, tipos de vírus, tratamentos. UOL. Brasília, 09 maio 2011, 19h57. Disponível em: http://noticias.uol.com.br/ultnot/cienciaesaude/ultimas-noticias/2011/05/09/dengue-e-um-dos-principais-problemas-de-saude-publica-no-brasil-segundo-revista-inglesa.jhtm>. Acesso em: 10 jul. 2011.

- PINHEIRO, N. A. M. Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático. 2005. 306 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- PINHEIRO, N. A. M.; SILVEIRA, R. M. C. F.; BAZZO, W. A. Ciência, tecnologia e sociedade: a relevância do enfoque CTS para o contexto do ensino médio. **Ciência & Educação**, v. 13, n. 1, p. 71-84, 2007.
- SILVEIRA, E. A modelagem em educação matemática na perspectiva CTS. 2014. 202 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.
- SKOVSMOSE, O. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.
- SOARES, M. R. Caderno pedagógico: modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: uma perspectiva à luz dos futuros professores de matemática. 2012. 120 f. Produção Técnica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012a.
- _____. Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: uma perspectiva à luz dos futuros professores de matemática. 2012. 312 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012b.
- _____. Um estado da arte das pesquisas acadêmicas sobre modelagem em educação matemática (de 1979 a 2015) nas áreas de educação e de ensino da Capes: as dimensões fundamentadas e as direções históricas. 2017. 598 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.