

## O ENSINO DE DERIVADAS: UMA REVISÃO DE LITERATURA

### The teaching of derivatives: a literature review

Gisele Scremin<sup>1</sup>

Maria Madalena Dullius<sup>2</sup>

**Resumo:** A presente pesquisa bibliográfica, de cunho teórico, foi realizada através de uma revisão de literatura de artigos completos publicados no Portal de Periódico da CAPES, tendo por objetivo traçar um panorama dos trabalhos realizados nos últimos 6 anos envolvendo a temática Derivadas, com a proposta de elencar as principais metodologias, recursos e teorias utilizadas, sendo parte integrante do projeto de dissertação do mestrado de Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, Lajeado/RS. Foram encontrados 21 artigos completos de interesse da pesquisa. Como resultados pode-se mencionar que diversas teorias foram utilizadas, porém a que mais se destacou foi a Teoria APOS de Ed Dubinsky. As metodologias e recursos utilizados foram a resolução de problemas, uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), abordagem discreta, triângulo de Cálculo e mapas conceituais. A motivação para a realização de grande parte das pesquisas está relacionada aos altos índices de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral e seu baixo aproveitamento.

**Palavras-chave:** Derivada. Pesquisas. Ensino.

**Abstract:** The present bibliographical research, in theoretical mark was developed through a literature review of entire articles published in CAPES Portal of Periodicals, with the goal to draw a panorama of the developed papers in the last 6 years involving the theme Derivatives, with the proposal of listing the main methodologies, resources and theories used, as being an integrated part of the dissertation project of the Master of Teaching of Exact Sciences, University of Vale do Taquari - UNIVATES, Lajeado / RS. They were found 21 entire articles relevant to the research. As results it can be mentioned that several theories were used, but the one that stood out more was APOS Theory of Ed Dubinsky; the methodologies and resources used were solving problems, use of Information and Communication Technologies (ICT's), discreet approach, calculation triangle and conceptual maps. The motivation to the development a large part of the research is related to the high failure rates in the initial courses of Differential and Integral Calculus and its low enjoyment.

**Keywords:** Derivative. Researches. Teaching.

---

<sup>1</sup> Mestranda em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, Lajeado/RS, Brasil. E-mail: gisele23scremin@gmail.com

<sup>2</sup> Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de Burgos (UBU), Espanha. Professora do Centro Universitário UNIVATES, Lajeado/RS, Brasil. E-mail: madalena@univates.br

## Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral, doravante denominado Cálculo, está presente em boa parte das grades curriculares dos cursos de graduação por ser um ramo importante da Matemática e seu campo de aplicações se estender a várias áreas do conhecimento como a Física, Química, Engenharias, Biologia entre outras. Entretanto, apesar de tantas aplicabilidades, as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem vem sendo foco de muitas pesquisas.

A problemática destacada frente ao ensino de Cálculo está no baixo rendimento dos alunos, um número expressivo de não aprovação e evasão, o que vêm despertando interesse de pesquisas a fim de desenvolver metodologias que possam contribuir para um melhor aproveitamento dos conteúdos elencados nesta disciplina, em especial do conceito de derivada e suas aplicações.

Com este trabalho, nossa proposta é apresentar os resultados do levantamento de literatura sobre o ensino e aprendizagem de Derivadas no Ensino Superior. Não temos a pretensão de esgotar o tema, pois as pesquisas não foram realizadas na totalidade das revistas científicas, com intuito de sondar as metodologias, recursos e teorias que vêm sendo utilizadas para contribuir com o ensino e aprendizagem desse conteúdo, de modo a elencar as principais contribuições e possíveis alternativas para desenvolver um ensino de melhor qualidade.

## Metodologia

A presente pesquisa bibliográfica, de cunho teórico, foi realizada através de uma revisão de literatura de artigos completos publicados no Portal de Periódico da CAPES, utilizando os critérios elencados no Quadro 1 para a seleção dos artigos:

**Quadro 1** – Critérios de seleção dos artigos.

Data de publicação	2011 a 2016
Tipo	Recursos
Tipo de Recurso	Artigos
Tópicos	Educação Matemática; Educação; Matemática; Cálculo; Engenharia
Palavras-chaves da pesquisa	Teaching And Derivatives; Learning And Derivative; Enseñanza And Derivada; Aprendizaje And Derivada; Tecnología And Derivada; Ensino And Derivada; Aprendizagem And Derivada, Tecnologias And Derivadas.

**Fonte:** Elaborado pelas autoras.

Com esses dados foram encontrados aproximadamente 424 trabalhos. Após a leitura dos títulos e resumos, observou-se que somente 21 trabalhos contemplaram as características procuradas, que foram: o ensino e aprendizagem de derivadas, o uso de recursos e metodologias.

## Resultados

O Quadro 2 sintetiza os artigos encontrados, oferecendo um panorama em relação ao título, autor, ano de publicação e periódico da publicação. Para serem mencionados posteriormente, os artigos foram designados por  $A_i$ , com  $i = 1, 2, 3... 21$ .

**Quadro 2** – Trabalhos analisados sobre derivada.

Item	Título (autores e ano)	Periódico
A1	An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. (MAHARAJ, 2013)	South African Journal of Education
A2	Análisis según el Modelo Cognitivo APOS* del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. (URQUIETA; CARRILLO; ANDRADE, 2014)	Bolema
A3	Evaluación de una estrategia didáctica para la apropiación del concepto "derivada de una función". (TELLES; ROMERO, TEYES, NATHAL, 2016)	Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo - RIDE
A4	Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto. (GORDILLO; PINZÓN; MARTÍNEZ, 2016)	Formación Universitaria
A5	Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre derivadas. (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015)	Bolema
A6	Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. ( E. BISOGNIN; V. BISOGNIN, 2011)	Educ. Matem. Pesq.
A7	Una Introducción a la derivada desde la Variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. (VRANCKEN; ENGLER, 2014)	Bolema
A8	Assessing conceptual understanding in mathematics: Using Derivative Function to Solve Connected Problems. (ORHUN, 2013)	Turkish Online Journal of Distance Education-TOJDE
A9	Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. (GONÇALVES; REIS, 2013)	Bolema

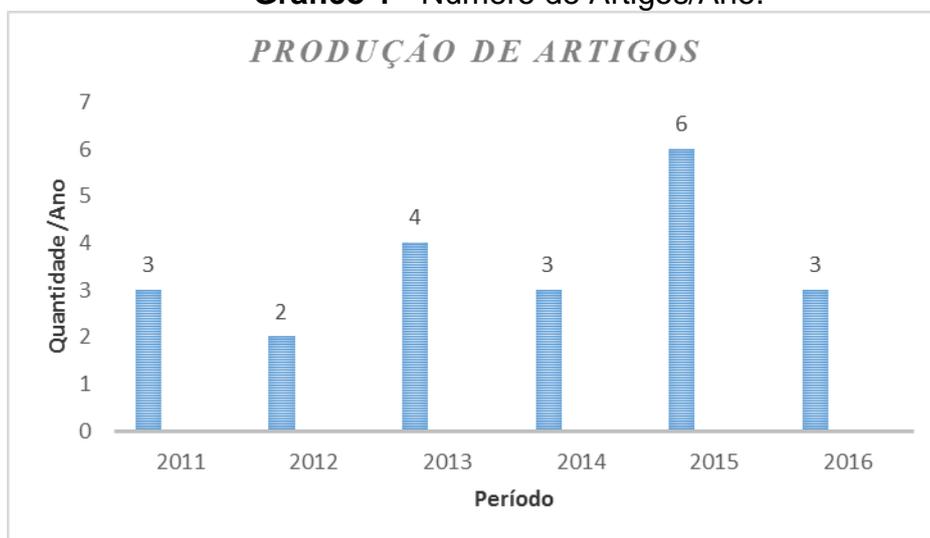
A10	Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. (SIYEP, 2015)	International Journal of STEM Education
A11	Derivative, maxima and minima in a graphical context. (RIVERA-FIGUEROA; PONCE-CAMPUZANO, 2012)	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology
A12	Using Short Video Lectures to Enhance Mathematics Learning – Experiences on Differential and Integral Calculus Course for Engineering Students. (KINNARI-KORPELA, 2015)	Informatics in Education
A13	The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers' Practices with the Idea of "Generic" (PANERO; ARZARELLO; SABENA, 2016)	Bolema
A14	Introducing Derivative via the Calculus Triangle (WEBER, TALLMAN, BYERLEY, THOMPSON, 2012)	Mathematics Teacher
A15	Discrete or continuous? – A model for a technology-supported discrete approach to calculus. (WEIGAND, 2015)	ZDM: Mathematics Education
A16	Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función. (MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2013)	Bolema
A17	Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. (PINO-FAN; GODINO; MOLL, 2011)	Educ. Matem. Pesq.
A18	Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. (HONG; THOMAS, 2015)	Mathematics Education Research Journal
A19	Is the derivative a function? If so, how do we teach it? (PARK, 2015)	Educ Stud Math
A20	Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. (VERHOEF; COENDERSA; PIETERSA; SMAALENA; TALLB, 2014)	Professional Development in Education
A21	Students' evolving meaning about tangent line with the mediation of a Dynamic Geometry environment and an Instructional Example Space. (BIZA, 2011)	Technology, Knowledge and Learning

**Fonte:** Elaborado pelas autoras.

Através dos dados levantados, pode-se destacar os países que estão realizando pesquisas relacionadas ao ensino de Derivadas e suas aplicações, demonstrando que a importância deste tema seja a nível nacional e internacional. Dentre os países encontrados em nossa pesquisa

estão: África do Sul (3), Chile (1), México (3), Colômbia (1), Brasil (2), Argentina (1), Turquia (1), Finlândia (1), Grécia (1), Itália (1), Alemanha (1), Espanha (2), Coreia (1), Estados Unidos (1) e Holanda (1).

**Gráfico 1 - Número de Artigos/Ano.**



**Fonte:** Elaborado pelas autoras.

O número de artigos encontrados por ano de publicação pode ser visto no Gráfico 1, no período dos últimos 6 anos, demonstrando que o número de pesquisas vem crescendo e mantendo-se ativo, por se tratar de um tema bastante discutido atualmente e de grande relevância no mundo acadêmico.

Dando continuidade ao estudo, concentramo-nos em explorar os textos dos artigos, procurando entender seus objetivos e destacar os referenciais teóricos, metodologias e recursos utilizados, a fim de agrupá-los em categorias que pudessem nos ajudar a fazer um retrato mais preciso destes, bem como identificar os que mais se aproximam dos nossos interesses, ou seja, aqueles que discutem o ensino de derivadas com uso de tecnologias.

Com o objetivo de melhor compreender os estudos que atualmente estão sendo desenvolvidos em relação à aprendizagem de derivadas, buscamos elencar as principais teorias que foram utilizadas de base para a realização destes trabalhos, veja o Quadro 3.

**Quadro 3 – Teorias utilizadas nos artigos.**

<b>Artigos (ITEM)</b>	<b>Principais Teorias</b>
A1, A2, A10, A16	Teoria APOS (DUBINSKY e MCDONALD ,2001)

3	A	Processo de assimilação e acomodação (PIAGET, 1977)
4	A	Mapas Conceituais (NOVAK, CAÑAS, 1988)
A5, A17		Enfoque ontosemiótico (EOS) do conhecimento e da instrução matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2007)
6	A	Imagem de conceito e definição de conceito (TALL e VINNER, 1981)
7	A	Linguagem e Pensamento variacional (CANTORAL et al., 2003)
8	A	Conhecimentos conceituais (TURKER, 1981; VINNER, 1989; TALL, 1991)
9	A	Investigações matemáticas (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006); Importância da visualização e do uso de <i>software</i> (COUY, 2008)
13	A	Processo de genética, através do modelo do MWS (KUZNIAK e RICHARD, 2014) e as ferramentas semióticas descritas pelo pacote semiótico (ARZARELLO, 2006).
14	A	Cálculos de THOMPSON (1994, 2008)
15	A	Abordagem discreta (HANS-GEORG WEIGAND, 2016)
18	A	Pensamento matemático avançado (FAMT) (STEWART e THOMAS 2007; THOMAS e STEWART 2011): três mundos da matemática (TWM; TALL 2004a, 2004b, 2008, 2013) e a Teoria APOS (DUBINSKY e MCDONALD 2001)
19	A	Abordagem cognitiva (SFARD, 2008).
20	A	Modelo Interligado de Crescimento Profissional (IMPG) (CLARKE e HOLLINGSWORTH'S, 2002)
21	A	Zona de desenvolvimento proximal (ZDP) (VYGOTSKY, 1978)

**Fonte:** Elaborado pelas autoras.

O trabalho A11 tratou da análise de livros didáticos e o A12 o desenvolvimento e aplicação de vídeos curtos como auxílio para as aulas de Cálculo, não apresentando uma teoria base para o desenvolvimento de seus trabalhos.

## Discussões

O exercício de tradução e leitura nos permitiu identificar dois tipos de pesquisas - as teóricas e as empíricas - e algumas características comuns que nos levaram a agrupar os artigos em categorias e subcategorias. Ressalta-se que os critérios para identificação e seleção adotados neste trabalho podem ser diferenciados, os aqui estabelecidos levaram em consideração o objetivo da pesquisa.

No Quadro 4 estão descritas as categorias e subcategorias elaboradas pelas autoras.

**Quadro 4** - Distribuição dos artigos em categorias e subcategorias.

<b>CATEGORIA</b>	<b>SUBCATEGORIA/DESCRIÇÃO</b>	<b>NÚMERO DE ARTIGOS</b>
B – Trabalhos de Natureza Empírica	B1 – Trabalhos que analisam e abordam a prática docente	3
	B2 – Trabalhos que utilizam teorias cognitivistas para análise das concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem	9
	B3 – Trabalhos que utilizam tecnologias como recurso educacional	5
C – Trabalhos de Natureza Teórica	Trabalhos que apresentam abordagens diferenciadas para o ensino de Derivadas	4
<b>Total</b>	_____	<b>21</b>

**Fonte:** Elaborado pelas autoras.

A categoria B, subdividida em três subcategorias, é constituída por trabalhos que apresentaram algum tipo de investigação empírica, ou seja, trabalhos que apresentam alguma experiência de ensino realizada com alunos e/ou professores. A pesquisa empírica provém de uma prática, de um experimento ou observação para a coleta de dados e serve para ancorar e comprovar no plano da experiência aquilo apresentado conceitualmente ou, em outros casos, a observação e experimentação empíricas fornecem dados para sistematizar uma teoria.

Os trabalhos desta categoria estão agrupados nas subcategorias  $B_1$ ;  $B_2$  e  $B_3$ . Enquanto na categoria C enquadram-se trabalhos de natureza teórica, destacando novas abordagens para o ensino de derivadas.

## **Análise e abordagem da prática docente**

Nesta subcategoria designada  $B_1$ , reunimos os trabalhos que tinham por objetivo analisar e considerar as práticas docentes relacionadas ao ensino de derivadas, onde podemos citar os trabalhos A4, A13 e A19. Em A4 a estratégia de ensino utilizada foi a construção, por professores, de **mapas conceituais** dos seguintes conteúdos: limites, o conceito de derivada desde a noção de reta tangente e da velocidade instantânea. Por meio do qual realizou-se um comparativo com mapas conceituais baseados em livro texto, neste caso o livro de Stewart (2008), com a finalidade de identificar obstáculos no uso da terminologia matemática elencada em muitos livros textos. O estudo realizado em A13 teve por objetivo analisar o papel do professor na gestão da gênese semiótica dos processos cognitivos do Espaço de Trabalho Matemático (MWS) e no processo de visualização, com ênfase no momento de mudança da derivada de um ponto específico  $x_0$  para a derivada como função global da variável  $x$ . Como resultado apresentou-se a importância de conduzir cuidadosamente o passo do símbolo  $x_0$  para o símbolo global  $x$ , neste caso o conceito foi apresentado como um exemplo significativo que, se bem conduzido, pode se tornar um recurso para o entendimento do conceito.

O estudo realizado em A19 examinou como professores (instrutores) definiram a derivada em um ponto usando o conceito de limite e passaram para a derivada de uma função em um intervalo, sob uma ótica cognitiva, através do uso de filmagens das aulas em duas turmas de Cálculo. Vários resultados se destacaram, entre eles o uso de vários mediadores visuais sem conexões explícitas entre elas, o que foi observado em várias aulas. O estudo também forneceu exemplos de que a experiência de muitos professores os “cega” perante as dificuldades que seus alunos têm em aprender o que parece óbvio, demonstrando a desconexão entre a narrativa do professor e as habilidades dos alunos em aprender.

## **Teorias cognitivistas para análise das concepções apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem**

Na subcategoria  $B_2$ , agrupamos os trabalhos de natureza empírica que utilizaram teorias cognitivistas para analisar as concepções apresentadas pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem de derivadas e suas aplicações (A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8, A10 e A16), conforme elencado no Quadro 2, sobre as principais teorias utilizadas.

Grande parte dos artigos encontrados utilizou da **teoria APOS** (Ação-Processo - Objeto e Esquema) como suporte teórico – trata-se de uma teoria cognitivista que visa compreender como ocorre a construção de conhecimentos matemáticos. Segundo essa teoria, um indivíduo precisa ter estruturas mentais apropriadas para dar sentido a um determinado conceito matemático; as ações, processos, objetos e esquemas necessários para

compreender um conceito são o que se referem às estruturas mentais. Logo destaca-se, então, que para um aluno construir ou compreender um conceito é necessário que este tenha um esquema pré-existente. No caso de derivadas, alguns conceitos ou esquemas pré-existentes são necessários, onde se pode citar as manipulações algébricas e funções, conforme apontado no trabalho A1.

O trabalho A1 salientou também a necessidade de se dedicar mais tempo auxiliando os alunos a desenvolverem as estruturas mentais nos níveis de processo, objeto e esquema, o que envolve abordagens verbais e gráficas para aplicações do conceito de Derivada. Ainda em A2 foi possível diagnosticar que o conceito de Derivada em um ponto não é compreendido no nível de ação, pois os alunos demonstraram ter dificuldades para ampliar seus conhecimentos acerca da abordagem geométrica do conceito, bem como dificuldades em discriminar sentenças verdadeiras de falsas, quanto às propriedades da Derivada relacionadas a sua monotonicidade e a concavidade de uma função.

A dificuldade relacionada à compreensão do aspecto geométrico e gráfico do conceito de Derivada, muitas vezes ocorre porque o aluno não possui uma imagem de conceito relacionado a este conteúdo. Segundo Tall e Vinner (1981), o aluno pode aprender de maneira significativa à medida que tem oportunidade de criar diferentes imagens conceituais referentes a um determinado conteúdo matemático, onde a representação gráfica pode contribuir significativamente para a construção desta imagem conceitual. No trabalho A6, as autoras destacaram algumas das dificuldades encontradas pelos alunos frente a exploração gráfica de derivadas, onde pode-se mencionar: dificuldades em análises do intervalo a partir da Derivada primeira e segunda; nas análises dos zeros da Derivada 1ª e 2ª; nos pontos onde a Derivada 1ª não existe; da existência da Derivada 1ª e a continuidade de funções.

Em algumas pesquisas relacionadas nesta subcategoria (A3, A7, A8) salienta-se a necessidade de ligação entre diferentes representações do mesmo conceito, para sua compreensão e explicação. Em A7, trabalhou-se a taxa de variação em diferentes problemas, a sequência didática utilizada proporcionou a motivação aos alunos e mobilizou suas concepções, proporcionando o conhecimento sobre derivada.

No caso das Derivadas, faz-se necessário a ligação entre problemas, interpretação gráfica, numérica, analítica e dos conhecimentos prévios dos alunos, de modo que o conhecimento conceitual adquira significado e aplicabilidade. O trabalho A10 buscou analisar os erros cometidos pelos alunos, em particular, na derivação de funções trigonométricas, através de aplicação de testes após a discussão do conteúdo proposta pelo professor. Por meio deste trabalho destacou-se que os erros exibidos pelos alunos eram conceituais e processuais, de interpretação e extrapolação linear.

Outro trabalho (A16) desta subcategoria caracterizou alguns indicadores do desenvolvimento do esquema de derivada por estudantes do

ensino superior, utilizando os níveis inter, intra e trans do desenvolvimento de um esquema proposto por Piaget e Garcia relacionados à equivalência lógica entre diferentes elementos matemáticos utilizados pelos alunos para resolver um problema. Para coleta de dados, os autores fizeram uso de questionários com atividades envolvendo a exploração gráfica do conceito de Derivada e resolução de um problema, além de uma entrevista. Foi possível destacar que dentro dos elementos matemáticos formadores da noção de Derivada tem-se distinguido dois blocos: um vinculado às ideias e significados que norteiam a definição de Derivada e outro vinculado às propriedades que tem a forma de implicações, implicação contrária e equivalência.

### **Tecnologias como recurso educacional**

As pesquisas inseridas na subcategoria  $B_3$ , (A9, A12, A18, A20, A21) analisam, implementam e discutem o uso de tecnologias como ferramenta educacional capaz de contribuir para o aprendizado de conceitos envolvendo Derivadas. Como principal recurso tecnológico, utilizou-se os *softwares*, onde pode-se citar: Geogebra (A9, A20), Dynamic Geometry (A21) e CAS calculator (A18). Já no trabalho A12 foram utilizados vídeos de curta duração.

Em um dos trabalhos (A9), o uso do *software* foi destacado pois possibilitou a investigação e experimentação matemática, principalmente no aspecto de visualização, contribuindo para a ressignificação dos conhecimentos e criação de um ambiente de aprendizagem diferenciado. Em A20, o *software* em parceria com a metodologia de lições japonesas, demonstra a importância da incorporação conceitual e não somente do simbolismo operacional, pois a tecnologia tem a capacidade de proporcionar maior e mais fácil as múltiplas representações de conceitos, anteriormente trabalhados somente de modo algébrico e numérico.

Em A12 o uso de vídeos de curta duração para o ensino de Derivadas, demonstra ser um método positivo, pois através da possibilidade de assistir no momento mais adequado, o aluno também tem a possibilidade de rever quantas vezes forem necessárias, possibilitando a internalização e compreensão dos conceitos, levando em consideração a capacidade e limitação de cada sujeito. De acordo com a pesquisa, os alunos com baixa proficiência em matemática tiveram mais tempo para pensar e repetir as explicações assistidas e de maneira geral os vídeos são um método adequado para apresentar um conteúdo matemático.

### **Abordagens diferenciadas para o ensino de Derivadas**

Na categoria C, reunimos os trabalhos de natureza teórica. Aqui se encontram os trabalhos que apresentam discussões e novas abordagens para o ensino de Derivadas (A11, A14, A15, A17). A pesquisa desenvolvida em A17, buscou realizar uma síntese de conhecimentos sobre a Derivada

relativos ao componente epistêmico do conhecimento didático matemático, conhecimento este necessário para a prática docente. Para a realização desta pesquisa os autores utilizaram o enfoque ontosemiótico (EOS) da cognição e instrução matemática enfocada em diversos trabalhos de Godino e seus colaboradores.

O trabalho A17, realizou-se por meio da análise documental, onde foi possível descrever nove configurações epistêmicas identificadas ao longo do período histórico de derivadas, assim organizada: [1] A tangente na matemática Grega; [2] Sobre a variação na idade média; [3] Métodos algébricos para encontrar tangentes; [4] Concepções cinemáticas para o traçado de tangentes; [5] As ideias intuitivas de limites para o cálculo de máximos e mínimos; [6] Métodos infinitesimais no cálculo de tangentes; [7] O Cálculo de Fluxiones; [8] O cálculo de diferenciais e [9] A derivada como limite.

Esta importante pesquisa de reconstrução do significado global de derivada, mostra:

A necessidade de se conhecer em profundidade o significado dos objetos matemáticos que fazem parte de um determinado conteúdo, a fim de ter-se condições para estabelecer critérios para a seleção de problemas e práticas de matemática a serem incluídos nos planos e processos de formação segundo as necessidades sociais e profissionais de um determinado grupo de pessoas a quem se destina. No caso das derivadas o seu significado global é peça chave para o conhecimento didático-matemático do professor (PINO-FAN; GODINO, MOLL. 2011, pág. 175, tradução nossa).

Outras pesquisas como A11, A14 e A15 demonstraram ou analisaram métodos para a conceituação de Derivada e suas aplicações, em A11 foi apresentado a exploração gráfica do conceito de Derivadas e dos máximos e mínimos de uma função, fazendo uma ponte entre contexto gráfico e provas formais, tal contexto foi discutido através da análise de livros didáticos, a fim de salientar a importância deste trabalho e saber de suas limitações e implicações no trabalho docente.

Já a pesquisa A14 propôs uma abordagem que se baseia na pesquisa de Cálculos de Thompson (1994, 2008) que introduz o conceito de Derivada de maneira que mantém a centralidade na taxa de mudança como suporte conceitual, através do triângulo de Cálculo. Acredita-se que esta abordagem facilita os entendimentos da Derivada, fornecendo exemplos de sua utilidade. A intenção da abordagem foi “permitir que os alunos visualizem a mudança em uma função devido à mudança em seu argumento” (Weber, Tallman, Byerley e Thompson, 2012, pág. 4).

Outra abordagem apresentada como alternativa para a aprendizagem dos conceitos relacionados a derivação foi apresentada por A15, que se trata de um projeto em andamento designado: “ABC - Uma abordagem

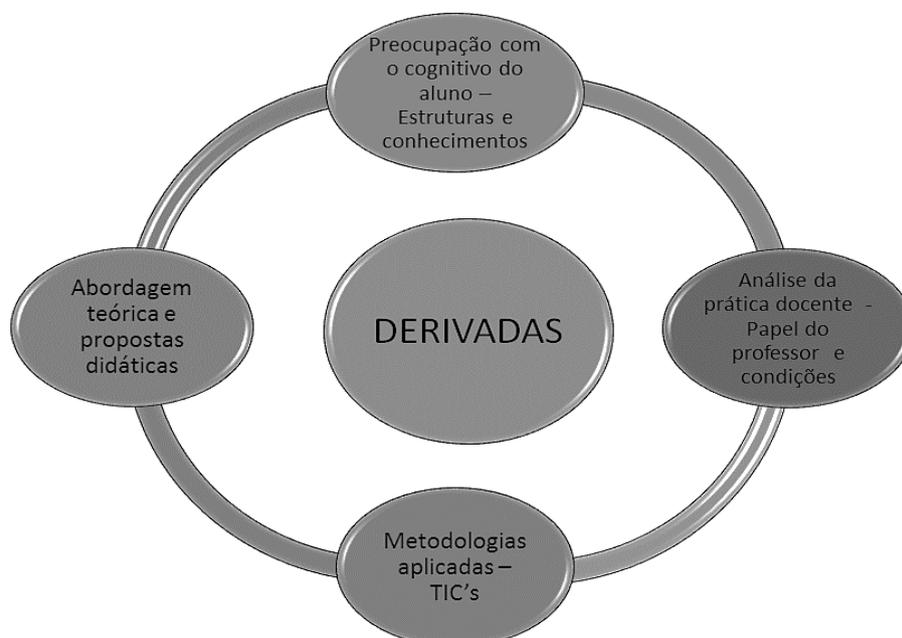
discreta dos conceitos básicos do cálculo”. Por meio da proposta de abordagem discreta espera-se que:

O aluno elabore o conceito de derivada local de uma função em um ponto e dê uma chance de uma melhor compreensão do processo de aproximação, devido à possibilidade de construção gradual deste processo. Mas também se espera que a apresentação paralela de sequências (Ou funções discretas) e suas sequências de diferenças (Ou funções) permitem também uma compreensão bem fundamentada do conceito de uma função derivada (global) (WEIGAND, 2016, pág. 2585, tradução nossa).

O uso de diferentes abordagens tem se mostrado uma alternativa para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente em Derivadas. Como se pode observar nesta categoria as alternativas são advindas de diferentes abordagens, mas que tem por objetivo despertar o interesse e promover a aprendizagem dos alunos, para que estes tenham condições de analisar e resolver problemas matemáticos que abordam o conceito de Derivadas.

### Conclusão

Através da leitura, tradução e análise dos artigos encontrados, foi possível mapear os principais enfoques de pesquisa relacionados ao tema Derivadas, como pode ser observado no esquema da Figura 1.



**Figura 1** - Esquema de enfoques sobre derivadas.

**Fonte:** Elaborado pelas autoras.

Um ponto importante a ser destacado em relação aos trabalhos analisados é que os contextos das pesquisas são os mais variados, não se

tratando somente de alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, mas de diferentes cursos, sejam da área de Engenharia e Ciências, demonstrando a importância deste tema por sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento.

Devido às aplicações da Derivada em problemas variados, percebeu-se que ainda é recorrente a dificuldade dos alunos em analisar, interpretar e resolver problemas que requerem um domínio matemático relacionado ao conceito de derivadas. Tal dificuldade é relacionada pela inexistência ou falta de abordagem unificada dos conceitos de Derivada, que precisam ser expressos de forma geométrica, gráfica, numérica e algébrica, que podem ser explorados de diversas formas com metodologias e recursos didáticos apropriados.

Outro ponto que merece atenção é a análise em torno do conhecimento prévio dos alunos, ou seja, da estrutura mental de cada indivíduo, pois segundo pesquisas neste trabalho apresentadas, um aluno necessita de estruturas mentais adequadas para incorporação de um novo objeto a ser trabalhado. O que precisa ser considerado quando se propõe o ensino de um conteúdo muitas vezes desconhecido ou que contempla um número expressivo de outros conceitos, como no caso de Derivadas. Em relação ao domínio do conteúdo pelo professor, apontou-se a necessidade de conhecimento global sobre o conceito de Derivadas, destacando que o professor irá selecionar a abordagem de acordo com o curso e seus objetivos, levando em consideração o desenvolvimento científico e tecnológico de seus alunos.

Percebemos com este mapeamento que as dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Derivadas, evidenciadas pelos altos índices de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo, constituem a principal motivação para realização dos trabalhos analisados. Este estudo revelou, ademais, que há uma gama de questões a serem investigadas e que é necessário, ainda, que novos trabalhos sejam realizados levando-se em conta o ensino e a aprendizagem de elementos de Derivadas e suas aplicações no Ensino Superior.

## Referencias

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.13, n.3, p.509-526, 2011. Disponível em: <[revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/7056/5997](http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/7056/5997)>. Acesso em: 06 jul. 2017

BIZA, I. Students' evolving meaning about tangent line with the mediation of a Dynamic Geometry environment and na Instructional Example Space. **Technology, Knowledge and Learning**, v. 16, n. 2, p. 1-32, 2011.

Disponível em: <[link.springer.com/article/10.1007/s10758-011-9180-3](http://link.springer.com/article/10.1007/s10758-011-9180-3)> . Acesso em: 12 abr. 2017.

GONÇALVES, C.D.; REIS, S DA F. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 417-432, ago. 2013. Disponível em: <[www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8253/5827](http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8253/5827)> Acesso em: 02 abr. 2017.

GORDILLO, W.; PINZÓN, J. W.; MARTÍNEZ, H. J. Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto. **Formación Universitaria**, v. 10, n. 2, p. 57-66, 2017. Disponível em: <[www.scielo.cl/pdf/formuniv/v10n2/art07.pdf](http://www.scielo.cl/pdf/formuniv/v10n2/art07.pdf)> . Acesso em 03 abr. 2017.

HONG, Y. Y.; THOMAS, J. O. M. Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. **Mathematics Education Research Journal**, v. 27, n. 1, p. 183-200, 2015. Disponível em: <[link.springer.com/article/10.1007/s13394-014-0135-6](http://link.springer.com/article/10.1007/s13394-014-0135-6)> . Acesso em: 23 abr. 2017.

KINNARI-KORPELA, H. Using Short Video Lectures to Enhance Mathematics Learning – Experiences on Differential and Integral Calculus Course for Engineering Students. **Informatics in Education**, v. 14, n. 1, p. 67–81, 2015. Disponível em: <[www.mii.lt/informatics\\_in\\_education/pdf/infedu.2015.05.pdf](http://www.mii.lt/informatics_in_education/pdf/infedu.2015.05.pdf)> . Acesso em: 10 abr. 2017.

MAHARAJ, A. An APOS analysis of natural science students’ understanding of Derivatives. **South African Journal of Education**, v. 33, n. 01, p. 1-19, 2013. Disponível em: <[www.sajournalofeducation.co.za/index.php/saje/article/view/458/342](http://www.sajournalofeducation.co.za/index.php/saje/article/view/458/342)> . Acesso em: 10 abr. 2017.

ORHUN, N. Assessing conceptual understanding in mathematics: Using Derivative Function to Solve Connected Problems. **TOJDE**, v. 14, n. 3, p. 138-151, jul. 2013. Disponível em: <[tojde.anadolu.edu.tr/yonetim/icerik/makaleler/904-published.pdf](http://tojde.anadolu.edu.tr/yonetim/icerik/makaleler/904-published.pdf)> . Acesso em: 19 abr. 2017.

PANERO, M.; ARZARELLO, F.; SABENA, C. The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers’ Practices with the Idea of “Generic”. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 265- 286, abr. 2016. Disponível em: <[www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/11311/7496](http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/11311/7496)> . Acesso em: 19 abr. 2017.

PARK, J. Is the derivative a function? If so, how do we teach it? **Educ Stud Math**, v. 89, p. 233-250, 2015. Disponível em: <[link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-015-9601-7](http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-015-9601-7)> . Acesso em: 30 abr. 2017.

PINO-FAN, R. L.; GODINO, D.J.; MOLL, F. V. Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.13, n.1, pp.141-178, 2011. Disponível em:

<revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4423/4025> . Acesso em: 01 mai. 2017.

PINO-FAN, R. L.; GODINO, D.J.; FONT, V. Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89, abr. 2015. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8544/6607> . Acesso em: 23 abr. 2017.

RIVERA-FIGUEROA, R. A.; PONCE-CAMPUZANO, C.J. Derivative, maxima and minima in a graphical contexto. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 44, n. 2, p. 284-299, jun. 2012. Disponível em: <www.ingentaconnect.com/content/tandf/tmes/2013/00000044/00000002/art00011#expand/collapse> . Acesso em: 15 abr. 2017.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 45, p. 281-302, abr. 2013. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5080/5526> Acesso em: 09 abr. 2017

SIYEPU, W. S.; Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. **International Journal of STEM Education**, p. 1-16, 2015. Disponível em: <stemeducationjournal.springeropen.com/track/pdf/10.1186/s40594-015-0029-5?site=stemeducationjournal.springeropen.com>. Acesso em: 02 mai. 2017.

TELLES, S.F.; ROMERO, R.A.M.; TEYES, S. E.; NATHAL, P.L.K. Evaluación de una estrategia didáctica para la apropiación del concepto “derivada de una función”. **RIDE**, v. 7, n. 13, Jul./ Dez. 2016. Disponível em: <www.ride.org.mx/index.php/RIDE/article/view/244/1134> . Acesso em: 28 abr. 2017.

URQUIETA, M. A. V; YAÑEZ, C.J; ANDRADE, S.J. Análisis según el Modelo Cognitivo APOS\* del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 403-429, abr. 2014. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8662/6090> . Acesso em: 24 abr. 2017.

VERHOEF, C.N.; COENDERS, F.; PIETERS, M.J.; SMAALEN, V.D.; TALL, D. Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. **Professional Development in Education**, v. 41, n. 1, p. 109-126, 2015. Disponível em: <www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/19415257.2014.886285> . Acesso em: 27 abr. 2017.

VRANCKEN, S.; ENGLER, A. Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468, abr. 2014. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8663/6096> . Acesso em: 25 abr. 2017.

WEBER, E.; TALLMAN, M.; BYERLEY, C.; THOMPSON, P. W. Introducing derivative via the calculus triangle. **Mathematics Teacher**, v.104, n. 4, p. 274-278, 2012. Disponível em: <pat-thompson.net/PDFversions/2012CalcTriangle.pdf> . Acesso em: 02 mai. 2017.

WEIGAND, G. H. Discrete or continuous? - A model for a technology-supported discrete approach to calculus. In: CERME - Congresso da Sociedade Européia de Pesquisa em Educação Matemática, 9, 2015, Praga, República Tcheca. **Anais...CERME9**, 2015. Disponível em: <hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289386/document> . Acesso em: 25 abr. 2017.