

ALUNOS RESOLVEM PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES EM SITUAÇÃO QUOCIENTE

STUDENTS SOLVE PROBLEMS INVOLVING EQUIVALENCE OF FRACTIONS IN A QUOTIENT SITUATION

Angélica da Fontoura Garcia Silva ¹

Raquel Factori Canova ²

Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro ³

RESUMO

Este artigo apresenta resultados de um estudo que investigou a compreensão de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da cidade de São Paulo, acerca da equivalência de números racionais em sua representação fracionária, em situações quociente. A investigação, de natureza qualitativa, é fundamentada teoricamente, em trabalhos que discutem processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo. Na análise deste estudo, percebeu-se que o ensino com as situações analisadas favoreceu a representação correta e a compreensão da equivalência, mas isso não ocorreu imediatamente. Baseados nestes resultados e nas discussões entre os participantes pode-se concluir que a compreensão do significado de frações tende a ser ampliada se houver, durante o ensino, a mediação do professor, utilizando a ideia de quociente, a fim de dar sentido aos símbolos e à sua manipulação.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem. Frações Equivalentes. Situação Quociente. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This article presents the results of one study that researching the comprehension of 5th grade elementary of São Paulo's one public school students about rational numbers equivalence in their fraction representation, in quotient situations. The research, of a qualitative nature, is theory works that discuss teaching- learning processes of the chosen content. In the analysis of the study, that teaching with quotient situations improved their correct representation and the understanding of equivalence, but this did not happen immediately. Based on these results and

¹ Doutora em Educação Matemática pela PUC- SP, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil, angelicafontoura@gmail.com

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Brasil, São Paulo, Brasil, fraquelc@yahoo.com.br

³ Doutoranda em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Anhanguera de São Paulo, Brasil, gracilenepinheiro@gmail.com

discussions among the participants, can conclude that understanding the meaning of fractions tend to be magnified if, during the teaching, the teachers' mediation adopted during the learning process uses the idea of quotient so as to attribute meanings to symbols and their use.

Keywords: Teaching and learning. Equivalent Fraction. Quotient situations. Problem Solving.

INTRODUÇÃO

Neste artigo analisamos resultados de um estudo que buscou, dentre outras coisas, investigar a compreensão de estudantes a respeito da equivalência de números racionais na sua representação fracionária⁴ por meio da exploração de situação envolvendo a ideia de quociente.

O estudo aqui descrito refere-se à temática ensino e aprendizagem de frações em situações quociente e foi desenvolvido em um processo formativo por um Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, no âmbito de um projeto de formação financiado pela CAPES e denominado Observatório da Educação. O propósito deste projeto foi a constituição de um grupo colaborativo de formação e pesquisas, cujo objetivo foi o de investigar as transformações da prática docente e o desenvolvimento profissional de professores que lecionam para os anos iniciais do Ensino Fundamental, quando estes estão inseridos em um processo de estudo de pesquisas em Educação Matemática e imbuídos de promover inovações curriculares nas suas salas de aula.

A investigação que aqui apresentamos teve as informações coletadas em sala de aula por uma das professoras envolvidas no Projeto, no semestre seguinte após a formação.

Durante a formação Pinheiro (2014), depois da discussão e apresentação de uma sequência elaborada por Nunes, Bryant, Pretzlik, & Hurry (2006) propôs também a investigação das produções dos alunos de professores participantes. Para este artigo apresentaremos a análise das resoluções de 20 alunos de uma das docentes, alunos do 5º ano com idade variando entre 10 e 11 anos.

A seguir, discutimos a relevância desta pesquisa por meio da apresentação de outros estudos que tratam de questões relativas aos processos de ensino e de aprendizagem das frações. Além disso, destacamos a teoria que fundamentou este estudo.

RELEVÂNCIA E FUNDAMENTAÇÃO

⁴ Nossa opção, neste artigo, para facilitar a leitura do texto, será a utilização do termo “fração” para designar os números racionais na representação fracionária.

Documentos curriculares oficiais brasileiros como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), por exemplo, discutem a necessidade que o professor de Matemática tem ao introduzir o ensino dos Números Racionais no início do Ensino Fundamental, com o objetivo de ampliar o conjunto dos Números Naturais. Entretanto, esse documento curricular adverte sobre as possíveis dificuldades encontradas pelas crianças:

[...] em que pese às relações entre números naturais e racionais, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada. (BRASIL, 1997, p.67)

Além disso, os autores desse documento propõem que o ensino de frações ocorra por meio da utilização de diferentes significados: *parte-todo*, *quociente* e *razão*. Contudo, discutem que, dentre os professores brasileiros, o significado *parte-todo* é o mais utilizado. Tal fato foi identificado também por Campos, Jahn, Leme da Silva e Ferreira da Silva, (1995), Canova (2006), Garcia Silva (2007) e Monteiro Cervantes (2010), Garcia Silva, Pinheiro e Canova (2018), por exemplo.

Nesse contexto, optamos por analisar neste artigo a compreensão dos estudantes do 5º ano do ensino fundamental a respeito de situações quociente uma vez que elas envolviam a ideia de equivalência e poderiam ser resolvidas também pelos esquemas de partição.

Apoiamo-nos ainda em resultados de investigações como as de Canova (2013), Strefland (1997) e Nunes et al. (2006) os quais afirmam que a introdução da fração por meio do significado quociente favorece a discussão em sala de aula e que os números racionais aparecerem “naturalmente como extensão” da divisão entre dois números naturais.

Ademais, mesmo considerando a equivalência ser uma ideia fundamental, sabemos que no conjunto dos números racionais tal conceito não é desenvolvido naturalmente. Nesse sentido, concordamos com Nunes et al. (2004) ao discutir as dificuldades encontradas por estudantes quando argumentam que o mesmo “rótulo” facilita a compreensão no campo dos números inteiros. Mas isso não ocorre com as frações, pois números escritos de maneiras diferentes podem representar a mesma quantidade quando se referem a uma mesma unidade.

Canova (2013), apoiada nos estudos realizados por Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) e Kerslake, (1986), também afirma que os alunos encontram dificuldades para a identificação da ideia de equivalência. Sobre esse fato, Cardoso e Mamede (2009, p. 2866) ao observarem que na resolução de atividades envolvendo equivalência de frações, os alunos apresentavam melhor desempenho em situações quociente, argumentam que isso talvez ocorra pelo “*facto deste tipo de situação ir ao encontro do conhecimento informal dos alunos.*”

Nessa perspectiva, investigar a compreensão dos alunos de uma das escolas participante de um processo formativo sobre situações envolvendo a ideia de quociente e também sobre o trato com frações equivalentes, parece-nos relevante.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Reiteramos que esta investigação foi realizada durante os estudos desenvolvidos por Pinheiro (2014) o qual analisou um processo formativo. Nele as professoras resolveram e discutiram sobre as dificuldades encontradas quando se propõem situações envolvendo a ideia de quociente, por meio da análise da situação investigada por Canova (2013). Além disso, vivenciamos e analisamos, juntamente com essas professoras, a sequência elaborada por Nunes et al. (2006). Em seguida, propusemos ao grupo de professores participantes que aplicassem essa sequência de situações aos seus alunos, intervindo somente no momento dedicado ao ensino da representação quociente⁵. Nosso propósito, nesse momento do processo formativo, era analisar o ensino e as estratégias utilizadas pelos alunos quando aprendiam e resolviam as questões envolvendo situações quociente sem a mediação da professora. Esperávamos com isso, favorecer, durante a sessão de formação de professores, a discussão sobre a importância da mediação durante o ensino.

Ressalta-se que essas situações foram aplicadas a 20 crianças com idade variando entre 10 e 11 anos, sendo elas alunas de uma das professoras participantes da formação. Durante a aplicação, duas das pesquisadoras, autoras deste estudo, entrevistaram alguns estudantes. A sequência era composta por quatro questões que exploravam situações quociente, dentre as quais escolhemos a primeira por abordar a equivalência, foco de interesse deste estudo. Reiteramos que antes de levar a atividade para a sala de aula, a professora dessas crianças participou da sessão de formação que apresentou, discutiu e refletiu acerca dos resultados do estudo de Canova (2013) e das ideias propostas para cada uma das situações da sequência que seria testada.

Na aplicação da sequência, os alunos foram dispostos em carteiras individuais e em seguida receberam um caderninho contendo as ilustrações das questões propostas para registrarem, individualmente, suas respostas às situações que foram apresentadas em *PowerPoint* e lidas pela professora. Em um momento da atividade, as crianças eram estimuladas a

⁵ Nunes et al. (2006) apoiados em Charles & Nason, (2000) e Empson, Junk, Dominguez, & Turner, (2005) sugerem que os professores falem às crianças que, daquele momento em diante, elas irão praticar a escrita de frações e, a partir da representação da “metade”, solicitem a explicação do que seria um número 1 acima do “traço”, o número 2 abaixo do “traço” e o “traço” entre os dois números. Em seguida, sugerem que o professor proceda ao ensino afirmando que aquela é a forma de interpretar a expressão: "Uma barra de chocolate dividida por 2 crianças". Em seguida, ampliam para outras situações quociente que representem outras frações.

refletir sobre suas respostas e, quando possível, a comparar com a do seu colega ao lado. Nossa intenção era verificar os argumentos utilizados por alunos durante a resolução de tarefas envolvendo a equivalência de frações apresentadas em situações quociente quando não estavam sob a mediação do professor.⁶ Durante a realização das atividades também fizemos registros com a utilização de recursos áudio visuais.

Neste artigo analisaremos a situação originalmente concebida por Streefland (1997) que foi também utilizada, com o objetivo de investigar a compreensão dos estudantes a respeito da equivalência, nos estudos de Nunes et al. (2006) A questão apresentada foi a seguinte:

Seis crianças foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas para reparti-las igualmente. O garçom era muito simpático e trouxe uma pizza de cada vez para eles não deixarem a pizza esfriar.

1. Como eles podem dividir a pizza? Que fração da primeira pizza cada um vai ganhar?
2. Quando o garçom trazer a segunda pizza, quanto cada um vai ganhar
3. Que fração cada um vai ganhar ao todo?
4. Se o garçom trazer as duas pizzas de uma vez, eles podem dividir de outra maneira? Como? Que fração da pizza cada um vai ganhar ao todo?
5. Veja essas duas frações. Você acha que elas mostram a mesma quantidade de pizza? Como você chegou a essa conclusão?



Figura 1: Questão envolvendo a ideia de quociente apresentada.

Fonte: Acervo das pesquisadoras

Nessa questão, Nunes et al. (2006) propõem que os alunos, depois de participarem de uma sessão de ensino da representação de frações quociente, resolvam individualmente, depois discutam em grupos e, ao final, apresentem suas respostas à classe. Era esperado que os estudantes percebessem que: é possível dividir um número menor por um número maior; diferentes frações poderiam representar a mesma quantidade; o dobro de coisas para ser dividido e duas vezes mais destinatários resultaria em quantidades equivalentes; e quanto maior o divisor, menor será o quociente.

Solicitamos à professora que nos trouxessem a resolução desta questão em razão de que poderíamos procurar similaridades e diferenças

⁶ Nunes et al. (2006) utilizaram a mesma situação, mas mediaram as discussões em plenária. Em nosso estudo solicitamos que tais mediações não ocorressem para que discutíssemos e refletíssemos sobre quais seriam as intervenções possíveis para cada situação.

entre os esquemas utilizados pelos estudantes ao resolver essa situação e os encontrados por Pinheiro (2014), Nunes et al. (2006) e Canova (2013) dentre outros estudos desenvolvidos na área e por termos utilizado essa situação para provocar a reflexão sobre a relevância da mediação do professor.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Analizamos os protocolos que contêm respostas elaboradas por 20 alunos participantes da investigação. Neles, buscamos pesquisar a compreensão da ideia equivalência, todavia, antes de questionar sobre a percepção dos alunos acerca dessa ideia, foi solicitada a representação.

A seguir apresentamos as respostas dadas aos três primeiros itens propostos na situação (itens 1, 2 e 3). Ressalte-se que nesta etapa da aplicação os professores já haviam ensinado aos alunos a representar frações de situações quociente.

Na resposta dada à primeira questão, por meio da qual se questionava a fração que representava a porção de pizza que cada criança receberia se o garçom trouxesse uma pizza, observamos que todos os alunos responderam $\frac{1}{6}$ na figura 2.

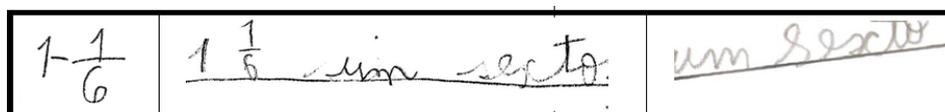


Figura 2: Os três tipos de respostas encontradas para o primeiro item.

Fonte: Acervo das pesquisadoras.

Foi possível perceber que, todos os estudantes investigados chegaram à mesma resposta, mas as representações foram diferentes: dezesseis alunos responderam por meio da representação fracionária, três utilizaram a escrita por extenso e um aluno representou por extenso e por meio da fração. Todas as crianças representaram a fração $\frac{1}{6}$ imaginando que as duas pizzas iriam ser divididas em 6 pedaços – que era o total de crianças – e que cada criança receberia um pedaço da primeira pizza entregue pelo garçom. Observamos ainda que nenhum dos estudantes mostrou sentir necessidade de representar por meio de desenho.

Esse fato nos permite acreditar que o ensino de fração por meio da ideia de quociente favoreceu a compreensão da representação fracionária da situação. Porém, o resultado foi diferente do encontrado por Canova (2013) na investigação realizada com crianças que não haviam passado pelo

ensino de frações envolvendo situações quociente: somente 57 das 326 respostas (17,5%) representaram corretamente a fração correspondente a uma situação similar a essa. Nesse sentido, consideramos que houve ampliação em relação ao que foi investigado por Canova (2013).

Na resposta ao segundo item, quatorze alunos (aproximadamente 70%) afirmaram que a fração da outra pizza também seria $\frac{1}{6}$; três estudantes referiram-se apenas à quantidade de pedaços, indicando que seria destinado a cada um, 1 pedaço, conforme a figura 3.

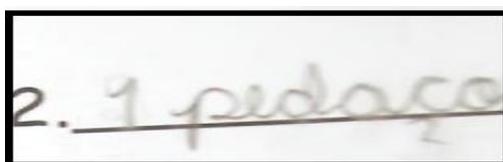


Figura 3: resposta do aluno 25 para o segundo item.

Fonte: Acervo das pesquisadoras.

Da mesma forma outro aluno indicou que seriam 2 pedaços, sem fazer referência a que fração de pizza representa cada pedaço; um respondeu: *“eles repartem a outra e comem 12”* referindo-se ao total de pedaços das duas pizzas; e uma criança respondeu 1, provavelmente relacionando ao fato de que cada criança também comeu um pedaço da segunda pizza. Tal resultado é similar ao encontrado por Nunes et al. (2006) e Canova (2013). Nesse sentido também podemos inferir que os estudantes investigados, quando submetidos à sequência de tarefas individualmente e com uma sessão de ensino da representação fracionária de situação quociente, observaram, como era esperado pelas autoras, ser possível dividir um número menor por um número maior e conseguiram, pelo menos em parte, representar a fração que correspondia à situação.

Em relação ao terceiro item, treze alunos responderam corretamente, dizendo que cada criança ganharia ao todo $\frac{2}{6}$ de pizza. Uma criança respondeu: *“com duas pizzas dá para cada um comer duas fatias”* sem fazer referência ao “tamanho”; outro respondeu: *“vai ganhar 2 pedaços para cada criança”* e duas crianças responderam: “2”, talvez fazendo também referência a dois pedaços de pizza.

Além disso, observamos indícios de que a representação correta foi reflexo do ensino, pois um dos estudantes, ao ser questionado sobre a representação que havia feito em resposta à fração de pizza que cada criança iria ganhar ao todo, respondeu, apontando para o algarismo 2 do

registro: “dois, dividido (apontando para o traço) por seis (apontando para o algarismo 6).” (Aluno 22) – imagem ilustrativa 6.

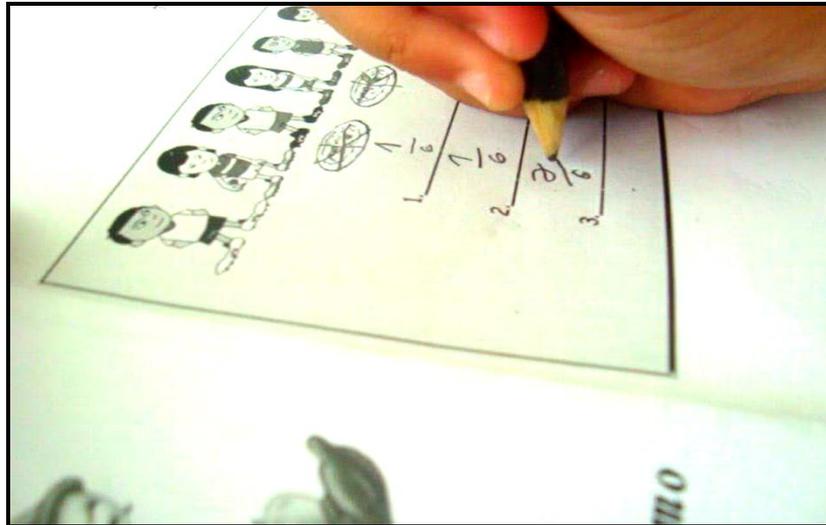


Figura 4 - Imagem vídeo do *Aluno 22*.

Fonte: Acervo das pesquisadoras.

Esse item não foi investigado por Nunes et al. (2006) e Canova (2013), mas acreditamos que nosso resultado é, pelo menos, similar ao de Pinheiro (2013). A autora afirma que “a soma (...) foi discutida mais em alguns grupos do que em outros; alguns alunos escrevem a soma $\frac{2}{12}$ e outros como $\frac{2}{6}$ ” (Canova, 2013, p 244). Em nosso estudo, não encontramos a representação $\frac{2}{12}$, entretanto encontramos referência à quantidade de pedaços. Ao analisar esses três itens é possível inferir que, provavelmente para essa amostra, o ensino da representação de situação quociente influenciou positivamente no desempenho dos estudantes quanto à representação das quantidades fracionárias.

Os itens 4 e 5, nos apresentaram uma ideia de como os alunos lidavam com a ideia de equivalência. Em relação ao quarto item, quando analisarmos as respostas dos alunos quanto a outras formas de dividir a pizza – que cada criança comeria se o garçom trouxesse as duas de uma só vez, percebemos que dez alunos responderam corretamente. Porém, somente cinco deles fizeram a representação fracionária da quantidade, conforme retratam as figuras a seguir:

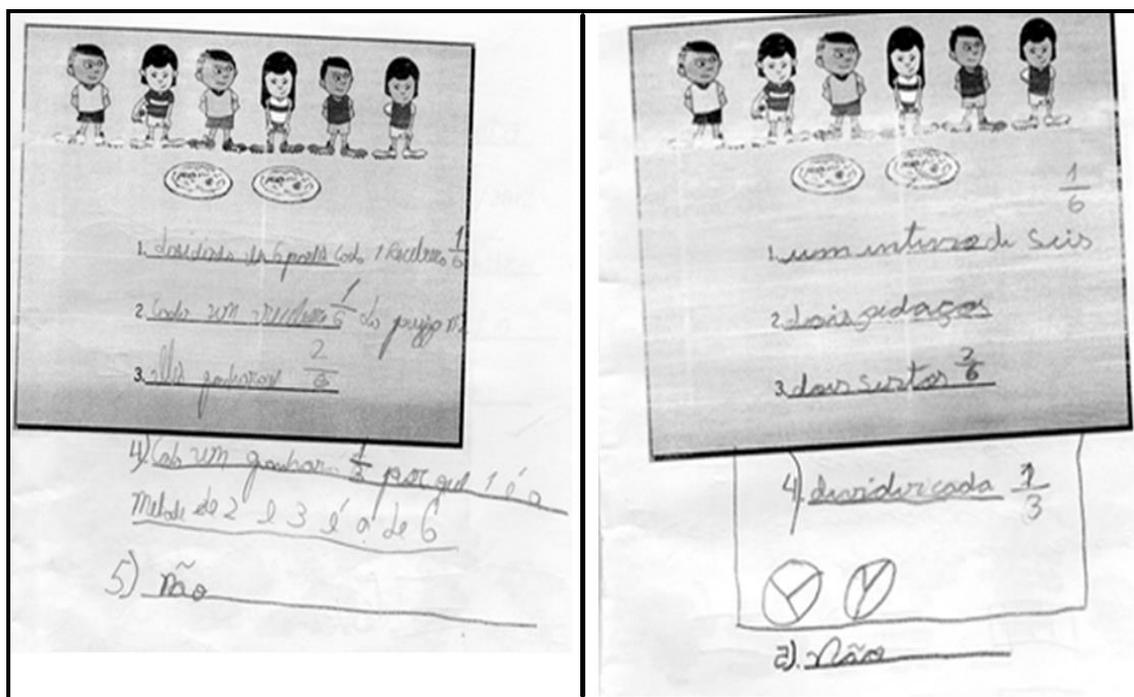


Figura 5 – Protocolos dos alunos 6 e 12.

Fonte: Acervo das pesquisadoras.

Já em relação ao item cinco, no qual os alunos deveriam comparar as frações que encontraram a fim de verificar se estas representavam a mesma quantidade, eles não expressaram compreender plenamente a ideia de equivalência, pois mesmo aqueles que apresentaram a representação fracionária com correção responderam “*não*” a este item, possivelmente considerando que a representação não era idêntica do ponto de vista da grafia. É importante destacar que os alunos que se referiram apenas à quantidade de pedaços disseram que estes representavam a mesma quantidade.

Nesta investigação não encontramos argumentos dos estudantes que apresentassem justificativas válidas ligadas aos fatos que: o dobro de coisas para ser dividido e duas vezes mais destinatários resultaria em quantidades equivalentes e, quanto maior o divisor, menor será o quociente de acordo com Nunes et al. (2006). Inferimos que, possivelmente, isso se deve ao fato de os estudantes investigados não serem habituados a justificar seus procedimentos em matemática, uma vez que a professora participante que ministra aula para esta sala fez a seguinte declaração durante o processo formativo: “*Meus alunos conseguiram entender como representar as frações, mas tiveram dificuldades para explicar o porquê. Eu acho que até porque nas minhas aulas eu não tenho o hábito de pedir explicações. Acho que esse foi o maior problema*” (PROFESSORA MARGARIDA).

Entretanto, acreditamos que, se tivéssemos discutido as respostas em

sala, alguns estudantes poderiam ter apresentado argumentações válidas, pois ao analisar os vídeos em que questionávamos alguns deles, individualmente, observamos haver a presença da ideia de equivalência quando, por exemplo, os alunos discutiram sobre o ocorrido: “(...) *a gente pegou a metade dos dois números (...) O número assim da fração vai diminuir, só que eles vão manter o mesmo que eles vão comer*”. (ALUNO 16).

Nesse sentido acreditamos que, em situação real de ensino, a mediação do professor seria de fundamental importância uma vez que em observação de situação dialogada o estudante tende a construir argumentação válida para o problema apresentado. Enriquecendo assim, possivelmente, as discussões e reflexões dos alunos durante o ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no estudo realizado, entendemos que o ensino da representação fracionária em situação quociente favoreceu a compreensão em grande parte dos alunos participantes. Notamos que a representação fracionária da primeira pizza foi imediata e além disso favoreceu também a compreensão da ideia de composição de duas frações com o mesmo denominador (do mesmo tamanho, segundo as crianças). Todavia, observamos que para este grupo investigado a construção de argumentação válida a respeito da equivalência de frações não foi trivial, havendo, assim, dificuldade por parte dos alunos nesse sentido. Dessa forma, acreditamos que isso se deve, em parte, ao fato de os estudantes não serem habituados a justificar seus procedimentos nas aulas de matemática.

As situações propostas por Nunes et al. (2006) oportunizaram aos alunos investigados vivências que possibilitaram a representação de frações envolvendo o significado quociente e favoreceram a reflexão sobre seu ensino durante o processo formativo, especialmente porque foi possível perceber que as crianças estabeleceram relações com situações do cotidiano. Todavia, consideramos o papel do professor como central. É ele que favorece ao estudante o levantamento de hipóteses e a construção de argumentações por meio da utilização de conceitos matemáticos aprendidos, sobretudo os relativos à divisão.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1ª a 4ª série)**. Brasília-DF, 1997.

BEHR, M. J., WACHSMUTH, I., POST, T. R., & LESH, R. Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, 15(5), p. 323-341.1984.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo.

_____. **Um Estudo das Situações Parte-todo e Quociente no Ensino e Aprendizagem do Conceito de Fração**. 196f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNIAN-SP, São Paulo, 2013.

CAMPOS, JAHN, LEME da SILVA e FERREIRA da SILVA. *Lógica das equivalências. Relatório de pesquisa não publicado*. São Paulo: PUC. 1995.

CARDOSO, P.; MAMEDE, E. *Considerações sobre o Ensino-aprendizagem do Conceito de Fração à Luz de um Estudo com Alunos do 6º ano do Ensino Básico*. In: **Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia**. Braga: Universidade do Minho, p. 2863-2876, 2009. ISBN- 978-972-8746-71-1.

GARCIA SILVA, A. F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

_____, Pinheiro, Maria Gracilene de Carvalho and Canova, Raquel Factori **Análise das Reflexões de uma Professora dos Anos Iniciais Participante do Observatório da Educação a Respeito da sua Prática**. *Bolema*, Dez 2018, vol.32, no.62, p.1113-1133. ISSN 0103-636X

KERSLAKE, D. **Fractions: Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project**. Windsor: NFER-Nelson.1986.

MONTEIRO CERVANTES, Patrícia de Barros. **Uma formação continuada sobre as frações**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)– Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 86 f. 2010.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U., EVANS, D., WADE. J. & BELL, D. **Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching**. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, Paper presented in Paris: 28-31, January.2004.

_____.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U., & HURRY, J. **Fractions: difficult but crucial in mathematics learning**. London Institute of Education, London: **ESRC-Teaching and Learning Research Programme**, 2006.

PINHEIRO, M. G. C. **Formação de Professores dos anos iniciais: conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração**.206f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIAN-SP, São Paulo, 2014

STREEFLAND, L.. **Charming fractions or fractions being charmed?** In: Nunes, Terezinha; Bryant, Peter (Eds.). **Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective** (p.347-372). Hove (UK): Psychology Press, 1997.ip