Areté
Revista Amazônica de Ensino de Ciências

.

DESVENDANDO A ÁLGEBRA NÃO ASSOCIATIVA EM REFERÊNCIAS PORTUGUESAS DE ÁLGEBRA LINEAR

UNRAVELING NON-ASSOCIATIVE ALGEBRA IN PORTUGUESE REFERENCES OF LINEAR ALGEBRA

DESENTRAÑANDO EL ÁLGEBRA NO ASOCIATIVA EN REFERENCIAS PORTUGUESAS DE ÁLGEBRA LINEAL

Patrícia Damas Beites*
Thiago Beirigo Lopes**

RESUMO

As ligações das subáreas Álgebra Linear e Álgebra Não Associativa, da área Álgebra, são abundantes no âmbito da investigação; já no ensino, ao nível da Licenciatura, essas ligações não são tão claras. De facto, o primeiro contacto dos estudantes com a Álgebra Linear é habitualmente associado a Licenciatura, enquanto com a Álgebra Não Associativa é usualmente associado a Mestrado e a Doutoramento. O presente estudo visa compreender as referidas ligações no ensino, tentando perceber se surgem conceitos de Álgebra Não Associativa em referências portuguesas de Unidades Curriculares contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas. A natureza da investigação é qualitativa, recorrendo a pesquisa documental e a análise documental aplicadas a documentos na página do sítio da Direção-Geral do Ensino Superior e a outros que através dela são acessíveis. Utiliza-se, ainda, análise de conteúdo sobre o previamente obtido, pelas técnicas de recolha e de análise de dados precedentes, conjunto de referências portuguesas de Unidades Curriculares contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas. Das seis referências analisadas, só duas contêm, direta ou indiretamente, conceitos de Álgebra Não Associativa; estes foram detetados pelas entradas concetuais e pelas entradas nominais, relacionadas com Álgebra Não Associativa, nos correspondentes índices remissivos.

Palavras-chave: Álgebra Não Associativa. Referência portuguesa. Álgebra Linear. Licenciatura em Matemática.

* Doutora em Matemática pela Universidade da Beira Interior (UBI). Professora da UBI, Covilhã, Castelo Branco, Portugal. Membro Integrado do Centro de Matemática e Aplicações, UBI (CMA-UBI). Membro Colaborador do Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro (CIDTFF-UA), Aveiro, Aveiro, Portugal. Endereço para correspondência: Rua Marquês d'Ávila e Bolama, Covilhã, Castelo Branco, Portugal, CEP: 6201-001. E-mail: pbeites@ubi.pt. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0266-7055
** Doutor em Educação em Ciências e Matemática (REAMEC/UFMT). Professor no Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), Confresa, Mato Grosso, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Vilmar Fernandes, 300, Bairro Santa Luzia, Confresa, Mato Grosso, CEP: 78.652-000. E-mail: thiago.lopes@ifmt.edu.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-9409-6140

ABSTRACT

The links between the sub-areas Linear Algebra and Non-Associative Algebra, of the area Algebra, are abundant in the context of research; in teaching, at the undergraduate level, these links are not so clear. In fact, students' first contact with Linear Algebra is usually associated with a bachelor's degree, while with Non-Associative Algebra it is commonly associated with a master's degree and a PhD. This study aims to understand these links in teaching, attempting to realize if concepts of Non-Associative Algebra appear in Portuguese references of contemporary courses of Linear Algebra in Undergraduate Courses at Portuguese Public Universities. The nature of the research is qualitative, using documental search and documental analysis applied to documents on the General Directorate of Higher Education website and to others that can be accessed through it. Content analysis is also used on the previously obtained, through documental analysis, set of Portuguese references for contemporary Linear Algebra courses of bachelor's degrees in mathematics at Portuguese Public Universities. Only two of the six analyzed references contain, directly or indirectly, concepts of Non-Associative Algebra; these were detected by the conceptual entries and the nominal entries, related to Non-Associative Algebra, in the corresponding indexes.

Keywords: Non-Associative Algebra. Portuguese reference. Linear Algebra. Undergraduate course of Mathematics.

RESUMEN

Los vínculos entre las subáreas Álgebra Lineal y Álgebra No Asociativa, del área de Álgebra, son abundantes en el ámbito de la investigación; en la enseñanza, a nivel de grado, estos vínculos no son tan claros. De hecho, el primer contacto de los estudiantes con el Álgebra Lineal suele estar asociado al grado, mientras que su primer contacto con el Álgebra No Asociativa suele estar asociado al máster o al doctorado. Este estudio pretende comprender los vínculos referidos en la enseñanza, intentando percibir si conceptos de Álgebra No Asociativa aparecen en referencias portuguesas de asignaturas contemporáneas de Álgebra Lineal en los cursos de grado en Matemáticas de Universidades Públicas Portuguesas. La naturaleza de la investigación es cualitativa, recurriendo a pesquisa documental y al análisis documental aplicados a documentos de la página web de la Dirección General de Enseñanza Superior y a otros a los que se puede acceder a través de ella. También se utiliza análisis de contenido sobre el previamente obtenido, por análisis documental, conjunto de referencias portuguesas de asignaturas contemporáneas de Álgebra Lineal de cursos de grado en Matemáticas de Universidades Públicas Portuguesas. De las seis referencias analizadas, sólo dos contienen, directa o indirectamente, conceptos de Álgebra No Asociativa; estos fueron detectadas por las entradas conceptuales y las entradas nominales, relacionadas con Álgebra No Asociativa, en los índices correspondientes.

Palabras clave: Álgebra No-Asociativa. Referencia portuguesa. Álgebra Lineal. Grado en Matemáticas.

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear é uma subárea da área Álgebra que, a nível elementar, contempla sistemas de equações lineares, transformações lineares, álgebra matricial e espaços vetoriais. Neste sentido, o termo “Álgebra Linear” pode também referir-se a uma Unidade Curricular (UC) de um curso de Licenciatura constante na Direção-Geral do Ensino Superior (DGES).

De facto, pelo menos uma UC Álgebra Linear, com esta designação ou algumas variações da mesma, é habitual nos planos de estudo de diversos cursos de Licenciatura numa Universidade Pública Portuguesa. Para além da Licenciatura em Matemática, a referida UC marca presença na Economia, na Física, nas Engenharias, na Gestão, entre outros cursos.

Outra subárea da área Álgebra é a Álgebra Não Associativa, mas em Portugal, contrariamente ao que sucede com a subárea Álgebra Linear, o primeiro contacto dos estudantes com a Álgebra Não Associativa é habitualmente associado a Mestrado e a Doutoramento, em Matemática ou em áreas com sólida componente de Matemática.

Na investigação, a abundância de ligações das subáreas Álgebra Linear e Álgebra Não Associativa, para além das naturais, advém ainda da formação académica no Mestrado e no Doutoramento. No ensino, ao nível da Licenciatura, estas ligações não são tão claras; este aspeto constitui a motivação inicial para o presente trabalho.

De modo a compreender as referidas ligações no ensino em Portugal, ao nível da Licenciatura, a questão de investigação que norteia o trabalho é a seguinte: Que conceitos de Álgebra Não Associativa surgem em referências portuguesas de Unidades Curriculares (UCs) contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas? Para responder a essa questão de pesquisa, objetivou-se compreender as referidas ligações no ensino, tentando perceber se surgem conceitos de Álgebra Não Associativa em referências portuguesas de Unidades Curriculares contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas.

Para apresentação da pesquisa realizada, o presente artigo está organizado da seguinte forma: na próxima seção, apresenta-se a contextualização teórica, abordando conceitos centrais e suas relações na investigação e no ensino de Álgebra Linear e Álgebra Não Associativa. Em seguida, detalha-se a metodologia utilizada, com ênfase na análise documental e de conteúdo. Posteriormente, são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir das referências analisadas. Por fim, nas considerações finais, discute-se a relevância das conclusões e são indicadas possibilidades de estudos futuros.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA

2.1 Álgebra Linear e Álgebra Não Associativa

Em Universidades Públicas Portuguesas, os conteúdos de uma UC de Álgebra Linear para uma Licenciatura são tipicamente: sistemas de equações lineares, transformações lineares, matrizes e espaços vetoriais. Antecedendo estes as transformações lineares, os conteúdos podem ser sequenciados em qualquer ordem (Beites, 2023).

Relativamente à ordem dos referidos conteúdos típicos, pode-se optar por duas abordagens (Harel, 1987): cálculo para abstração – as técnicas de cálculo precedem as ideias abstratas; abstração para cálculo – primazia das estruturas algébricas, motivando o cálculo – que corresponde à ordem clássica de apresentação dos conteúdos.

À referência de Agudo (1992), primeira edição de 1960, seguiram-se diversos livros de Álgebra Linear em Portugal. Segundo Santana e Queiró (2018), a referência de Magalhães (1998), primeira edição de 1989, foi pioneira a "refletir as mudanças no ensino da Álgebra Linear ocorridas nos E. U. A." (p. vii), considerando cálculo para abstração em vez da ordem clássica.

Atendendo aos níveis de ensino associados aos primeiros contactos com, respetivamente, a Álgebra Linear e a Álgebra Não Associativa, as referências de UCs a nível nacional são, usualmente e respectivamente, em português e em inglês. Quanto à Álgebra Não Associativa, uma exceção nacional é a referência portuguesa de Santos (2011), sobre grupos e álgebras de Lie.

Ainda assim, deteta-se Álgebra Não Associativa em referências portuguesas de Álgebra Linear ao nível de uma Licenciatura em Portugal. Um exemplo é o conceito de álgebra de Lie na referência de Vitória e Lima (1998), que segue a abordagem do cálculo para a abstração, sugerindo abundantes ligações à Geometria Analítica.

Em ambas as subáreas surgem estruturas algébricas – conjuntos não vazios munidos de uma ou mais operações n-árias que satisfazem propriedades –, como álgebras associativas. Mas o termo "não-associativo", introduzido por Shirshov (1958, como citado em Bremner *et al.*, 2006) em anéis – "rings that are nearly associative" – indica não necessariamente associativo.

Definição. (Beites, 2010). Seja V um espaço vetorial sobre um corpo F. Diz-se que V é uma álgebra n-ária (sobre F) se V está munido de uma operação n-ária chamada multiplicação, ou seja, uma aplicação n-linear de V^n em V. Se $n = 2$ então diz-se que V é uma álgebra binária, escrevendo-se simplesmente álgebra.

De acordo com Tomber (1979), a primeira menção impressa a uma álgebra não associativa encontra-se numa adenda de Arthur Cayley a um seu artigo sobre curvas elípticas de 1845. Não recuando mais historicamente, Tomber (1979) refere que inicia a sua breve história da Álgebra Não Associativa, datando o seu início dos anos 1930, com William Rowan Hamilton.

Hamilton queria munir o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, para além da adição e da multiplicação escalar usuais, de uma multiplicação com propriedades semelhantes às da multiplicação de números complexos. As tentativas, que duraram anos, culminaram na descoberta da álgebra dos quaterniões, esta vista como álgebra de composição (Beites; Nicolás, 2017).

Tomber (1979), no seu relato destas tentativas, menciona o abandono de uma das prezadas regras algébricas por Hamilton. Com efeito, Hamilton considerou as relações $ij = k = -ji$ e, consequentemente, a não validade da comutatividade. Este aspeto abriu caminho ao estudo de álgebras onde outras regras algébricas usuais não são válidas.

Pelo exposto, ainda segundo Tomber (1979), os quaterniões são os precursores das álgebras não associativas. Hamilton comunicou a descoberta a John Thomas Graves, dando origem a uma correspondência postal entre os dois. Numa das cartas surge a álgebra dos octoniões, numa tabela de multiplicação de Graves, conhecida por Graves e Hamilton em 1844 (Tomber, 1979).

Uma construção similar à de Graves aparece na referida adenda de Cayley, pelo que em 1847 já havia um exemplo de uma álgebra não associativa. Nesse ano, Cauchy publicou um método de resolução de equações algébricas (Teoria das Chaves Algébricas), reclamado por Grassmann (2000) como seu, onde se encontra uma tabela de multiplicação de uma álgebra de Lie.

A noção de álgebra de Lie, designação de Hermann Weyl nos anos de 1930, foi introduzida por Sophus Lie nos anos de 1870. Lie pretendia estudar o conceito de transformação infinitesimal, inicialmente utilizando a designação de grupo infinitesimal, não coincidente com a definição atual de grupo mas antes com a de álgebra de Lie (Robertson; O'Connor, 2024; Santos, 2011).

Definição. (Beites, 2010) Seja $\mathcal{U}$ uma álgebra sobre F, com multiplicação denotada por justaposição. Diz-se que $\mathcal{U}$ é uma álgebra de Lie se, para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{U}$,

$$x^2 = 0 \text{ e } (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \text{ (identidade de Jacobi).}$$

Se ch$(F) \neq 2$ então $x^2 = 0$ pode ser substituída por $xy = -yx$ (anticomutatividade).

A Álgebra Não Associativa evoluiu simultaneamente em várias frentes; para além de classes de álgebras definidas por outras identidades, surgem nomeadamente (Tomber, 1979): álgebras de Lie – modelo para teorias de outras classes de álgebras e instrumento auxiliar inicial na resolução de problemas sobre grupos de Lie (Santos, 2011); álgebras de Jordan; álgebras alternativas.

Definição. (Beites, 2010) Seja $\mathcal{U}$ uma álgebra, com multiplicação denotada por justaposição. Diz-se que $\mathcal{U}$ é uma álgebra de Jordan se, para quaisquer $x, y \in \mathcal{U}$,

$$xy = yx \text{ (comutatividade) e } x^2(yx) = (x^2y)x \text{ (identidade de Jordan).}$$

A partir de uma álgebra associativa $\mathcal{A}$, há construções *standard* para obter álgebras de Jordan e álgebras de Lie. Como se recorda nos resultados subsequentes (Teorema 1 e Teorema 2), bem conhecidos, têm-se a chamada álgebra de Jordan especial e também a designada álgebra de Lie associada a $\mathcal{A}$, que é uma álgebra comutadora.

Teorema 1. (Beites, 2010) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa, sobre um corpo F com ch$(F) \neq 2$, com multiplicação denotada por justaposição. A álgebra $\mathcal{A}^+$ com multiplicação $\circ$ dada por:

$$x \circ y = \frac{xy+yx}{2} \text{ é uma álgebra de Jordan.}$$

Teorema 2. (Beites, 2010) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa, sobre um corpo F com ch$(F) \neq 2$, com multiplicação denotada por justaposição. A álgebra $\mathcal{A}^-$ com multiplicação $[.,.]$ dada por $[x, y] = xy - yx$ é uma álgebra de Lie.

Novamente Tomber (1979) menciona a importante Escola de Abraham Adrian Albert – matemático americano de ascendência russa –, e a relevante Escola de Nathan Jacobson – matemático americano nascido na Polónia. Aqui o sentido de Escola é o do conjunto formado pelo professor/investigador e os seus estudantes/discípulos científicos.

Shirshov (1958, como citado em Sabinin *et al.*, 2006) apresentou um dos primeiros panoramas da Álgebra Não Associativa. Segundo Bremner *et al.* (2006), o primeiro livro em Inglês com o estudo sistemático de Álgebra Não Associativa deve-se a Schafer (1995), e uma exposição compreensiva do trabalho da sobressaliente Escola Russa deve-se a Zhevlakov *et al.* (1982).

A evolução da Álgebra Linear e da Álgebra Não Associativa, ligadas e de modo abrangente com álgebras n-árias, é observável em artigos publicados e classificados pelo esquema *Mathematics Subject Classification*, com os códigos de assunto "15 Linear and multilinear algebra; matrix theory" e "17 Nonassociative rings and algebras" (MATHSCINET, 2024).

2.2 Análise de referências de Matemática

Um manual escolar é um instrumento pedagógico (Alves *et al.*, 2023) associado ao ensino e à aprendizagem da Matemática no Ensino Não Superior – Ensino Básico e Ensino Secundário. É uma referência de Matemática Escolar que segue as orientações curriculares em vigor, as quais são emanadas, em Portugal, pela tutela (Costa; Catarino, 2007) – Governo de Portugal.

No Ensino Superior Português, a noção mais próxima da de manual escolar é a de referência principal. Com efeito, não é tão habitual utilizar a designação manual, mas, numa UC, nem sempre é indicada a principal das referências na lista das recomendadas para essa UC; a lista, em geral, é concebida tendo em conta a acessibilidade na biblioteca da instituição (Beites, 2023).

O programa, e as referências, de uma UC é definido por docentes da instituição de Ensino Superior associada. Contrariamente ao Ensino Não Superior (Fan *et al.*, 2013), a estrutura de uma UC no Ensino Superior é muitas vezes sugerida pelas referências (Costa; Catarino, 2007) e a análise destas permite recolher informação sobre a lecionação nas aulas (Cook *et al.*, 2018).

A análise de referências, tais como manuais escolares, surge em vários estudos. Mas Sierra-Vásquez *et al.* (2003) consideravam à data não ser abundantes os de investigação em Educação Matemática, o que poderia resultar da falta de formação matemática dos historiadores ou do reduzido interesse dos matemáticos (Choppin, 1993, citado em Sierra-Vásquez *et al*., 2003).

No âmbito da Matemática Escolar têm-se, entre outros, trabalhos sobre: transposição didática, de Chevallard e Johsua (1982, citado em Sierra-Vásquez *et al*., 2003); evolução do ensino dos números negativos, de Schubring (1988, citado em Sierra-Vásquez *et al*., 2003); comparação de manuais escolares de vários países, de Howson (1995, citado em Sierra-Vásquez *et al*., 2003).

Sierra-Vásquez *et al*. (2003), pela possibilidade de obtenção de informação da atividade em sala de aula, salientam a importância da análise de manuais escolares. Com efeito, entre outros, estes investigadores consideram que, mais do que as orientações curriculares oficiais num país, a prática letiva é grandemente determinada pelos manuais.

Ainda Sierra-Vásquez *et al*. (2003) estudaram o desenvolvimento histórico do conceito de continuidade em 31 manuais escolares, datados de 1950 a 2000. A análise, em três fases e recolhendo a última os resultados das precedentes, considera três dimensões posteriormente utilizadas por diversos investigadores: concetual; didática-cognitiva; fenomenológica.

Em Portugal, com a metodologia de Sierra-Vásquez *et al*. (2003), Ponte *et al*. (2007) estudaram a evolução na abordagem de equações do 2.º grau, em 7 manuais portugueses publicados entre o final do século XIX e o início do século XXI. Em particular, os autores pretendiam saber se o ensino do tópico acompanhou o desenvolvimento da teoria das equações algébricas.

Num artigo mais recente, também com a metodologia de Sierra-Vásquez *et al*. (2003), Teixeira *et al*. (2015) abordaram a utilização da História da Matemática no ensino. Com o suporte dado pelas diversas formas de a utilizar, o foco foi um manual escolar de Matemática do final do século XX para o 9.º ano de escolaridade.

Teixeira *et al*. (2015) averiguaram que tipo de utilização é feito da História da Matemática no referido manual escolar. Este trabalho insere-se noutro estudo, mais abrangente, ‘‘das práticas de uma cadeia geracional de três professores de Matemática’’ (Teixeira *et al*., 2015, p. 205); um destes professores utilizou o manual na sua prática.

Noutro artigo ainda mais recente, Martins e Martinho (2024) analisaram “todos os manuais portugueses de 10.º e 11.º ano [*sic*], autorizados pela Direção-Geral de Educação para o ano letivo 2020/2021, da disciplina de Matemática A, para se perceber a diversidade de tarefas que cada um propunha” (p. 66).

As últimas autoras referem a importância da exposição dos estudantes a uma diversidade de tarefas com distintas funções, diversidade essa fundamental para a aprendizagem. Martins e Martinho (2024) recorrem a análise de conteúdo, utilizando categorizações prévias de tarefas que têm em conta a estrutura e o nível de dificuldade das mesmas.

A prevalência da análise de referências matemáticas no Ensino Não Superior, que são manuais escolares, também se nota a nível internacional (Fan *et al*., 2013). Estes investigadores apresentam um panorama da investigação crescente sobre manuais escolares na Educação Matemática, referindo que se concentra no produto – o próprio manual escolar.

No referido estudo destacam trabalhos acerca de manuais escolares, como os de: Flanders (1987, citado em Fan *et al*., 2013), considerado pioneiro; Levin (1998, citado em Fan *et al*., 2013), relativo a frações e divisão; Stylianides (2009, citado em Fan *et al*., 2013), sobre demonstração; Pickle (2012, citado em Fan *et al*., 2013), que aborda o tratamento de conteúdo estatístico.

Mais investigação sobre manuais escolares pode ser encontrada em citações de Gracin (2018), focado em atividades matemáticas (representar, calcular, interpretar, argumentar) associadas a tarefas. Quanto a Fan *et al*. (2013), estes referem ainda, atendendo à investigação crescente relativa à análise de manuais escolares, a também crescente atenção dada à metodologia.

Como nos estudos de Sierra-Vásquez *et al*. (2003), Fan *et al*. (2013) referem distintas dimensões, adequadas aos objetivos, para a análise dos manuais escolares nos estudos citados. Por exemplo, Pepin e Haggarty (2001, citado em Fan *et al*, 2013) consideram: intenções matemáticas; intenções pedagógicas; contextos sociológicos; tradições culturais.

No Ensino Superior Português, Costa e Catarino (2007) analisaram documentos e referências de UCs de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura, em 2003/2004, de Universidades Públicas Portuguesas. Para cada referência, recorreram a análise de conteúdo, com tratamento descritivo e as categorias: apresentação dos conceitos; estrutura do desenvolvimento.

Costa e Catarino (2007) contribuíram para a compreensão das dificuldades dos estudantes no conceito de dependência linear. Com efeito, procuraram identificar descontinuidades na ligação entre o conceito de colinearidade, lecionado no Ensino Não Superior, e o conceito de dependência linear, lecionado no Ensino Superior.

De momento, o trabalho de Costa e Catarino (2007) parece ser o único sobre análise de referências de Matemática no Ensino Superior Português. A subárea Álgebra Linear associada a este estudo é também o contexto dominante para os poucos, mas recentes como mencionam Rensaa e Grevholm (2015), trabalhos sobre essa análise no Ensino Superior internacional.

Com participantes do Ensino Superior, também do Não Superior, Österholm (2006, citado em Fan *et al.*, 2013) estudou a compreensão leitora de diferentes tipos de textos matemáticos – com e sem símbolos, e histórico – por estudantes. Shepherd e van de Sande (2011, citado em Fan *et al.*, 2013) descreveram a leitura de uma referência de Pré-Cálculo por estudantes universitários.

Rensaa e Grevholm (2015) analisaram, com um modelo teórico do último autor, partes de uma referência de Álgebra Linear, para a licenciatura, com o intuito de procurar a sua relevância para estudantes de Engenharia. Também apresentaram a visão dos estudantes do estudo sobre a referência, coincidindo estes com os investigadores em fatores como exemplos motivadores.

Considerando os desafios concetuais que a multiplicação de matrizes envolve para estudantes de Licenciatura, Cook *et al.* (2018) investigaram a sua apresentação em UCs de Álgebra Linear. Analisaram 24 referências introdutórias à Álgebra Linear quanto à sequenciação do conteúdo e ao material introdutório, abordagens indicadas por Harel (1987).

Harel (2019) estudou as formas – categorias, chamadas variedades, de uma taxonomia emergente – como a Geometria é utilizada no ensino da Álgebra Linear, bem como o impacto das mesmas na capacidade dos estudantes realizarem certos procedimentos. Para tal, analisou referências de Álgebra Linear republicadas em múltiplas edições e resultados de estudos.

Betancur-Sánchez *et al.* (2021) analisaram 3 manuais de Álgebra Linear, focando-se nos conceitos de valor e de vetor próprios de um endomorfismo de um espaço vetorial. A análise, baseada em Harel (1987), foi considerada numa decomposição genética apresentada pelos autores, com a teoria APOE (Ação, Processo, Objeto, Esquema).

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174 1984-7505

Recentemente, Alayont *et al*. (2023) analisaram, recorrendo à taxonomia de Bloom, tarefas de final de secção de uma referência de Cálculo. As referidas tarefas são frequentemente usadas para indicação de trabalho de casa, influenciando os processos de ensino e de aprendizagem, sendo os níveis de exigência cognitiva relevantes pelas implicações no ensino do Cálculo.

3 METODOLOGIA

O presente estudo tem natureza qualitativa, tipo de investigação que se caracteriza (Merriam, 2009): pelo foco no processo (que é indutivo), na compreensão e, ainda, no significado, do que se extrai dos dados; pela participação ativa do investigador na recolha e na análise dos dados; pelo caráter ricamente descritivo do produto.

A questão de investigação norteadora do estudo, onde Álgebra Não Associativa e Álgebra Linear são subáreas de pesquisa atual da investigadora, é a seguinte: (Q1) Que conceitos de Álgebra Não Associativa surgem em referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas?

Por conveniência da investigadora, (Q1) contém critérios de inclusão de referências: “referência portuguesa” designa uma referência publicada em Portugal e escrita em português; “contemporâneas” indica o Acesso ao Ensino Superior 2024; “Universidades Públicas” refere-se ao tipo de ensino (Universitário) e ao subsistema (Público) da instituição (DGES, 2024).

Ainda por conveniência da investigadora, consideramos as edições das referências que a esta são acessíveis no acervo pessoal ou, se inexistentes neste, na biblioteca da UBI. Nos cursos com mais de uma UC de Álgebra Linear, consideramos a união das listas de referências como uma lista. Como critério de exclusão de referências, não consideramos as que são só de tarefas.

Assim, o objetivo principal é compreender as ligações das subáreas Álgebra Linear e Álgebra Não Associativa, no ensino, ao nível da licenciatura, tentando perceber se surgem conceitos de Álgebra Não Associativa em referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas.

Como questões subsidiárias da questão de investigação norteadora do estudo têm-se as seguintes subquestões de investigação: (Q1.1) Quais são os Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas?; (Q1.2) Quais são as UCs contemporâneas de Álgebra Linear destes cursos?; (Q1.3) Quais são as referências portuguesas destas UCs?.

Deste modo, tendo em vista o mencionado objetivo principal do estudo, elencam-se os primeiros três objetivos operacionais: identificar os Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas; em cada um dos respetivos planos de estudo, indicar as UCs de Álgebra Linear; em cada uma destas UCs, identificar as referências portuguesas.

No que se refere às subquestões (Q1.1), (Q1.2), (Q1.3), e aos correspondentes objetivos operacionais, recorre-se a pesquisa documental – técnica de recolha de dados que se baseia na consulta de documentos (Bardin, 2016) – na e acessíveis pela página do sítio da DGES (2024), e a análise documental – técnica de análise de dados com função referencial (Bardin, 2016).

Com a análise documental, que trabalha com documentos, pode passar-se de um documento primário para um documento secundário, uma representação do primário conseguida por meio de uma ou mais operações (Bardin, 2016). Estes procedimentos de transformação, em função dos objetivos da investigação, pretendem dar uma forma conveniente ao documento primário.

Na apresentação de resultados relativos às subquestões (Q1.1)-(Q1.3) consideram-se figuras e tabelas. Destes resultados emerge o corpus – referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas – a considerar para a próxima questão subsidiária da questão de investigação.

Como próxima questão subsidiária da questão de investigação norteadora do estudo tem-se a seguinte subquestão de investigação: (Q1.4) Quais são os conceitos de Álgebra Não Associativa no corpus? Assim, cada objetivo operacional sucede logicamente ao anterior, sendo o quarto: identificar conceitos de Álgebra Não Associativa no corpus.

Relativamente à subquestão (Q1.4), e ao correspondente objetivo operacional, recorre-se a análise de conteúdo – técnica de análise de dados com função inferencial (Bardin, 2016) e constituída por quatro etapas: pré-análise, neste estudo via pesquisa e análise documentais

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174 1984-7505

que levaram ao corpus; exploração do corpus; tratamento de resultados; inferência; interpretação.

Com a análise de conteúdo, que trabalha com mensagens (comunicação), podem manipular-se mensagens no que se refere a conteúdo e à forma de expressão deste. O propósito desta manipulação é pôr em evidência indicadores de uma realidade distinta daquela que é a da mensagem (Bardin, 2016).

O tratamento de resultados relativos à subquestão (Q1.4) é apresentado por referência, considerando as categorias de análise adequadas e pré-definidas. Mais concretamente e para cada referência, procuramos entradas concetuais – relativas a um conceito – e nominais – relativas a nomes de matemáticos –, relacionadas com Álgebra Não Associativa no índice remissivo.

4 RESULTADOS

4.1 Relativos às subquestões (Q1.1)-(Q1.3)

A consulta do Índice por Curso/Instituição na página do sítio da DGES (2024), com a escolha de M para letra inicial do nome do Curso, ainda com a escolha dos Nomes dos Cursos de Licenciatura que começam com ‘‘Matemática’’, levam aos cursos que constam na Fig. 1, com a correspondente identificação da instituição de Ensino Superior.

Figura 1 - *Cursos de licenciatura cujo nome começa com "Matemática" (DGES, 2024)*

9209	**Matemática**	***[Lic-1º cic]***
0300	Universidade de Aveiro	
0501	Universidade de Coimbra - Faculdade de Ciências e Tecnologia	
0602	Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia	
1503	Universidade de Lisboa - Faculdade de Ciências	
1307	Universidade da Madeira - Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia	
1000	Universidade do Minho	
0903	Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia	
1103	Universidade do Porto - Faculdade de Ciências	
9835	**Matemática e Aplicações**	***[Lic-1º cic]***
0400	Universidade da Beira Interior	
9385	**Matemática Aplicada**	***[Lic-1º cic]***
1503	Universidade de Lisboa - Faculdade de Ciências	
1103	Universidade do Porto - Faculdade de Ciências	
9210	**Matemática Aplicada à Economia e à Gestão**	***[Lic-1º cic]***
0203	Universidade do Algarve - Faculdade de Ciências e Tecnologia	
0602	Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia	
1517	Universidade de Lisboa - Instituto Superior de Economia e Gestão	
L167	**Matemática Aplicada à Gestão do Risco**	***[Lic-1º cic]***
0903	Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia	
L117	**Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa**	***[Lic-1º cic]***
3118	Instituto Politécnico de Lisboa - Instituto Superior de Engenharia de Lisboa	
9345	**Matemática Aplicada e Computação**	***[Lic-1º cic]***
1518	Universidade de Lisboa - Instituto Superior Técnico	
L193	**Matemática Aplicada e Ciência de Dados**	***[Lic-1º cic]***
1203	Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - Escola de Ciências e Tecnologia	
L321	**Matemática Aplicada e Tecnologias Digitais**	***[Lic-1º cic]***
6810	ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa (Sintra)	

Fonte: DGES (2024).

Descartamos os cursos: 3118/L117 e 6810/L321, por fazerem parte da oferta formativa de instituições de ensino superior que não são universidades; 0203/9210, 0602/9210, 1517/9210 e 0903/L167, por serem direcionados para aplicações da Matemática à Economia e à Gestão, não sendo expetáveis referências de Álgebra Linear com maior nível de abstração que as de cursos contemplando uma maior diversidade de aplicações.

Descartamos ainda os cursos: 1503/9385 e 1103/9385, por a(s) UC(s) de Álgebra Linear destes cursos coincidirem com a(s) UC(s) de Álgebra Linear dos cursos, respetivamente, 1503/9209 e 1103/9209. Apesar do Curso 1518/9345 estar associado à UL, como o Curso 1503/9209, não se descarta por esta associação derivar da inclusão do IST na UL em 2013, não coincidindo as UCs.

Consideramos os cursos restantes (Tabela 1); para cada UC de Álgebra Linear nos respetivos planos de estudos, elencadas nessa tabela pela ordem de cursos da DGES (Fig. 1), descarregamos a correspondente Ficha de UC (FUC), que inclui lista de referências, na página do sítio da instituição de Ensino Superior associada.

Tabela 1 - *UCs contemporâneas de Álgebra Linear por Licenciatura selecionada em Matemática (DGES, 2024)*

Licenciatura	**UCs de Álgebra Linear**
Matemática	
0300/9209	Álgebra Linear I Álgebra Linear II
0501/9209	Álgebra Linear e Geometria Analítica I Álgebra Linear e Geometria Analítica II
0602/9209	Álgebra Linear e Geometria Analítica I
1503/9209	Álgebra Linear e Geometria Analítica I Álgebra Linear e Geometria Analítica II
1307/9209	Álgebra Linear
1000/9209	Álgebra Linear I Álgebra Linear II
0903/9209	Álgebra Linear e Geometria Analítica I Álgebra Linear e Geometria Analítica II
1103/9209	Álgebra Linear e Geometria Analítica I Álgebra Linear e Geometria Analítica II
Matemática e Aplicações	
0400/9835	Álgebra Linear
Matemática Aplicada e Computação	
1518/9345	Álgebra Linear
Matemática Aplicada e Ciência de Dados	
1203/L193	Álgebra Linear e Geometria Analítica I Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Tabela 2 apresentamos a presença das referências portuguesas (*corpus*) encontradas nas UCs de Álgebra Linear por Licenciatura selecionada em Matemática, utilizando os códigos: A, CPS, GFS, Ma, Mo e SQ para, respetivamente, as referências de Agudo (1992), Cabral *et al*. (2021), Giraldes *et al*. (1997), Magalhães (1998), Monteiro (2001) e Santana e Queiró (2010).

Tabela 2 - *Referências portuguesas em UCs contemporâneas de Álgebra Linear por Licenciatura selecionada em Matemática*

Código do curso	**Código da referência**					
	A	**CPS**	**GFS**	**Ma**	**Mo**	**SQ**
0300/9209			x		x	
0501/9209						x
0602/9209	x	x		x	x	
1503/9209						
1307/9209	x			x	x	
1000/9209		x	x			x
0903/9209		x	x		x	x
1103/9209				x	x	
0400/9835	x	x		x		x
1518/9345		x		x	x	x
1203/L193	x	x	x			x

Fonte: Elaborada pelos autores.

4.2 Relativos à subquestão (Q1.4)

Referência A

A procura no índice remissivo da referência A de Agudo (1992) conduziu a cinco entradas relacionadas com Álgebra Não Associativa, quatro concetuais – ‘‘Álgebra, (linear) comutativa, 73’’ (p. 361); “Álgebra, de Lie, 230” (p. 361); “Álgebra, não associativa, 230” (p. 361); “Jacobi, identidade, 230” (p. 364) – e uma nominal – “Jacobson, N., 48, 118, 244” (p. 364).

As entradas “Álgebra, de Lie 230”, “Álgebra, não associativa, 230” e “Jacobi, identidade, 230”, que remetem para a mesma página, levam à tarefa 14. de uma secção designada “Exercícios” e à nota de rodapé (1) seguintes. Conduzem ainda, via (1), à nota de rodapé (2) que se encontra noutra página de Agudo (1992) a que remete a entrada ‘‘Álgebra, (linear) comutativa, 73’’:

14. Sejam a, b, c três vectores aplicados num ponto *O*. Mostre que o vector $(a \wedge b) \wedge c$, quando não é nulo, é paralelo ao plano definido por a e b e, portanto, da forma $\alpha a + \beta b$, com α e β escalares.
Procurando as expressões cartesianas dos vectores num sistema o. n. $\{e_1, e_2, e_3\}$ em que e_1 seja paralelo a a, e_2 paralelo ao plano de a e b e $e_3 = e_1 \wedge e_2$, conclua que $\beta = a|c$ e $\alpha = -(b|c)$ e, por conseguinte,

$$(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a.$$

Verifique que a igualdade tem lugar mesmo que o “duplo produto externo” seja nulo, e que ela mostra que o produto externo satisfaz a identidade (de Jacobi)

$(a \wedge b) \wedge c + (b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b = 0$ e não goza da propriedade associativa (1).
Ainda como aplicação da igualdade obtida e das propriedades do produto misto, mostre que

$$a \wedge b \mid c \wedge d = (a \wedge b) \wedge c|d = \begin{vmatrix} a|c & b|c \\ a|d & b|d \end{vmatrix}.$$

(p. 230-231)
1) Observe-se, no entanto, que têm lugar as propriedades ii), iii) e iv) da Nota 2 da p. 73 e por isso se pode dizer que R^3, juntamente com o produto externo, constitui uma *álgebra não associativa*. É interessante assinalar ainda que esta álgebra constitui um exemplo das chamadas *álgebras de Lie* – álgebras não associativas em que o produto é anticomutativo e satisfaz a identidade de Jacobi $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$. (p. 230)
2) Se, além das duas operações consideradas num espaço vetorial E relativo a K, existir uma *multiplicação vectorial* que a cada par (f, g) de elementos de E associe $f.g = fg \in E$ e satisfazendo as condições: i)$f(gh) = (fg)h$; ii) $f(g + h)$= $fg + fh$; iii) $(g + h)f = gf + hf$"; iv) $\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$, com $\lambda \in K$, diz-se que E constitui uma *álgebra (linear)* em relação ao corpo K. A álgebra é comutativa se $fg = gf\ \forall f, g \in E$ e terá identidade (ou unidade) se existir $u \in E$ tal que $uf = fu = f\ \forall f \in E$.
Vê-se, pois, que o conjunto dos números complexos se pode considerar um espaço vetorial real (ignorando a possibilidade de multiplicar números complexos) ou uma álgebra comutativa com unidade em relação a R (quando se considera também a multiplicação de complexos). (p. 73)

A tarefa 14, e notas de rodapé (1) e (2), envolve diretamente os seguintes conceitos de Álgebra Não Associativa: álgebra; álgebra comutativa; álgebra não associativa; álgebra com identidade (ou unidade); álgebra de Lie. Excetuando as noções de associatividade e de anticomutatividade, só definidas implicitamente, para as restantes são apresentadas definições.

Ainda na referida tarefa, e notas de rodapé relacionadas, especificamente na (2), exemplificam-se brevemente os conceitos de álgebra comutativa e de álgebra com identidade (unidade) recorrendo aos números complexos. Estes também servem para salientar a diferença entre espaço vetorial e álgebra.

A entrada "Jacobson, N., 48, 118, 244" conduz a duas referências do algebrista Não Associativo: *Lectures in Abstract Algebra I.*, de 1951, na Bibliografia do Capítulo II. Esboço da teoria dos números reais; *Lectures in Abstract Algebra II*, de 1953, na Bibliografia do Capítulo IV. Vectores e matrizes e na Bibliografia do Capítulo VI. Espaços vectoriais e afins. Espaços Euclidianos.

Referência CPS

A procura no índice remissivo da referência CPS de Cabral *et al*. (2021) conduziu a duas entradas relacionadas com Álgebra Não Associativa, ambas concetuais e que constituem duas formas, com diferente ênfase de "Jordan", de mencionar a noção de produto de Jordan: "Jordan (produto de), 73" (p. 583); "produto de Jordan, 73" (p. 586).

As entradas "Jordan (produto de), 73" e "produto de Jordan, 73", que remetem para a mesma página, conduzem à tarefa 1.94 e esta, por sua vez, à tarefa 1.11 subsequentes. Contudo, para a última tarefa, noutra página de Cabral *et al*. (2021), não foi encontrada qualquer entrada no índice remissivo:

> Exercício 1.94 Sejam $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Considere o comutador de A por B, representado por $[A, B]$ e definido no Exercício 1.11. Designa-se por produto de Jordan de A por B, e representa-se por $A * B$, a matriz definida por
> $$A * B = \frac{AB + BA}{2}.$$
> Justifique que, para quaisquer $A, B, C \in M_{n\times n}(K)$, se tem:
> a) $[A, (B * B)] = 2([A, B] * B)$;
> b) $[A, [B, C]] = 4\,[(A * B) * C - (A * C) * B]$;
> c) $AB = (A * B) + \frac{[A,B]}{2}$. (p. 73)
> Exercício 1.11 Sejam $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Designa-se por comutador de Lie de A por B (por esta ordem) a matriz, representada habitualmente por $[A, B]$, definida por
> $$[A, B] = AB - BA.$$
> Mostre que, quaisquer que sejam $A, B, C \in M_{n\times n}(K)$, se tem:
> a) $[A, B] = [B, A]$ se, e só se, A e B comutam;
> b) $[A, B] = -[B, A]$;
> c) $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$;
> d) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$. (p. 22).

A tarefa 1.11 envolve diretamente um conceito de Álgebra Não Associativa, com definição para duas quaisquer matrizes quadradas: comutador de Lie. De modo indireto, com escrita matricial de Álgebra Linear para matrizes quadradas, alude ainda aos seguintes conceitos de Álgebra Não Associativa: álgebra; álgebra comutadora; álgebra de Lie associada a uma álgebra associativa.

Especificamente, embora indiretamente por não aparecer explicitamente com definição, em 1.11 b) pede-se para mostrar a anticomutatividade da álgebra de Lie

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174 1984-7505

$(M_{n\times n}(K), [\,.\,,.\,])$. Nas alíneas c) e d) desta tarefa pedem-se, respetivamente, demonstrações da 2.ª condição e da 1.ª condição de linearidade, para a 1.ª posição, para a multiplicação da referida álgebra.

A tarefa 1.94 envolve diretamente os conceitos de Álgebra Não Associativa a seguir elencados, também para duas matrizes quadradas arbitrárias: comutador, remetendo para a tarefa 1.11; produto de Jordan. De modo indireto, mais uma vez com escrita matricial de Álgebra Linear, alude ainda aos conceitos de Álgebra Não Associativa: álgebra; álgebra de Jordan especial.

Referências GFS, Ma, Mo, SQ

Para cada referência GFS, Ma, Mo, SQ, a procura no índice remissivo conduziu a 0 entradas relacionadas com Álgebra Não Associativa.

5 DISCUSSÃO

A análise de referências de Matemática não é abundante (Choppin, 1993, como citado por Sierra-Vásquez *et al*., 2003; Fan *et al*., 2013), sendo ainda mais escassa no Ensino Superior. Ainda assim, Fan *et al*. (2013) apresentam um panorama de investigação crescente, especialmente sobre manuais escolares no Ensino Não Superior, com atenção crescente dada à metodologia. Nos estudos citados na contextualização teórica sobre análise dessas referências, nomeadamente no único – de Costa e Catarino (2007) – no Ensino Superior Português, utiliza-se análise de conteúdo com distintas designações para as categorias de análise (e. g., dimensões) e diferentes categorias consoante os objetivos; o mesmo sucede no presente estudo.

As referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas destinam-se a estudantes de licenciatura, mas só A de Agudo (1992) e CPS de Cabral *et al*. (2021) contêm, direta ou indiretamente, conceitos de Álgebra Não Associativa. A abundância de ligações entre a Álgebra Linear e a Álgebra Não Associativa na investigação (MATHSCINET, 2024) contrasta assim com a sua escassez no ensino, ao nível da Licenciatura (Beites, 2023), mostrada pelas referências; uma explicação plausível é a diferença temporal do primeiro contacto dos estudantes com a Álgebra Linear – Licenciatura – e com a Álgebra Não Associativa – Mestrado e Doutoramento.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174 1984-7505

O índice remissivo de A conduziu ao maior número de entradas – concetuais e nominais – relacionadas com Álgebra Não Associativa. A única nominal em A levou a referências da autoria de Jacobson – nome incontornável da Álgebra Não Associativa (Tomber, 1979; Bremner *et al*., 2006); as obras não são de Álgebra Não Associativa, mas de Álgebra Abstrata com, no volume I, conceitos básicos e, no volume II, ligada à Álgebra Linear mais abstrata e avançada. A única referência portuguesa de Álgebra Não Associativa, talvez por ser especificamente para uma UC sobre Grupos e Álgebras de Lie de final de Licenciatura em Matemática, exigente em conhecimentos anteriores (Santos, 2011), não consta da bibliografia de CPS.

Apesar dos respetivos índices remissivos de conteúdos das referências A e CPS indicarem a abordagem cálculo para a abstração (Harel, 1987), Agudo (1992) antecipa as noções de espaço vetorial e de transformação linear para o início de um capítulo grandemente dedicado a matrizes. O facto de A se aproximar bastante da abordagem abstração para cálculo (Harel, 1987), tendo Magalhães (1998) sido pioneiro no cálculo para a abstração (Santana e Queiró, 2018) em Portugal, torna natural que em A se encontre conteúdo mais abstrato de Álgebra Não Associativa. Em particular, nota-se a presença de mais estruturas algébricas de Álgebra Não Associativa em A do que em CPS.

No mesmo sentido de maior abstração de A comparativamente com CPS, a referência A contém definições gerais, mais abstratas, de Álgebra Não Associativa e a referência CPS contém menos definições, estas restritas às matrizes quadradas, menos abstratas. Contudo, no que diz respeito à definição de álgebra, para além da adjetivação “linear”, Agudo (1992) exige associatividade. Estes aspetos não sucedem contemporaneamente, nomeadamente na Álgebra Não Associativa, em que não surgem nem esta adjetivação nem a exigência de associatividade na definição de álgebra (Beites, 2010; MATHSCINET, 2024; Santos, 2011), que é não necessariamente associativa (Shirshov, 1958, como citado em Bremner *et al*., 2006; Zhevlakov *et al*., 1982).

6 CONCLUSÕES

O presente estudo pretende contribuir para a compreensão das ligações da Álgebra Linear e da Álgebra Não Associativa no ensino em Portugal, ao nível da Licenciatura. Retornando à questão (Q1) de investigação, o objetivo principal é essa compreensão, tentando perceber se surgem conceitos de Álgebra Não Associativa em referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas. Apesar de saber mais sobre o ensino nestas UCs (nomeadamente, a utilização dada às referências) ser uma relevante direção de investigação futura, a estrutura de uma UC no Ensino Superior é frequentemente sugerida pelas referências.

Os resultados relativos às subquestões (Q1.1)-(Q1.3) de investigação mostram: os Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas; as UCs contemporâneas de Álgebra Linear destes cursos; as referências portuguesas destas UCs. Também destes resultados emerge o *corpus* – seis referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas – para a subquestão (Q1.4) de investigação. Os resultados relativos a esta exibem os conceitos de Álgebra Não Associativa no *corpus*, os quais se concentram (direta ou indiretamente) somente em duas referências – as de códigos A e CPS.

A referência A contempla os conceitos: álgebra; álgebra comutativa; álgebra não associativa; álgebra com identidade (ou unidade); álgebra de Lie. A referência CPS considera os conceitos: comutador de Lie; álgebra; álgebra comutadora; álgebra de Lie associada a uma álgebra associativa; álgebra de Jordan especial. Assim, as referências portuguesas de UCs contemporâneas de Álgebra Linear de Cursos de Licenciatura em Matemática de Universidades Públicas Portuguesas promovem poucas ligações entre a Álgebra Linear e a Álgebra Não Associativa. Uma oportunidade para incrementar tal promoção é constituída pelas UCs Álgebra Linear e Projeto Final, como na UBI, com a produção de uma breve monografia a ligá-las.

Um interesse nessa promoção pode residir na prossecução de estudos pós-licenciatura em Álgebra Não Associativa, pelo que outra direção de investigação futura é a adaptação do conteúdo da mesma nas referências A e CPS. Em particular, podem ser construídas tarefas que passem por pedidos de demonstração – atividade desafiante para estudantes (Beites *et al*., 2020; Beites *et al*., 2022) – dos Teoremas 1 e 2; a proposta destas pode levar a outras tarefas construídas com base em erros de estudantes (Beites *et al*., 2023). De modo abrangente, ainda outra direção de investigação futura é a discussão da importância e das implicações do estudo da Álgebra Não Associativa na formação de estudantes de licenciatura em Matemática.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174 1984-7505

REFERÊNCIAS

AGUDO, F. R. D. **Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 4.ª ed. Escolar, 1992.

ALAYONT, F.; KARAALI, G.; PEHLIVAN, L. Analysis of Calculus textbook problems via Bloom's taxonomy. **PRIMUS**, v. 33, n. 3, p. 203-218, 2023. https://doi.org/10.1080/10511970.2022.2048931

ALVES, N.; AIRES, A. P.; CATARINO, P. Inclusão de elementos do quotidiano em recentes manuais escolares: Motivação dos alunos para a Geometria. **Indagatio Didactica**, v. 15, n. 2, p. 117-130, 2023. https://doi.org/10.34624/id.v15i2.32580

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 70. Lisboa: Edições, 2016.

BEITES, P. D. **Álgebras e super-álgebras de Filippov**. Tese (Doutorado) – Universidade da Beira Interior, Covilhã/PT, 2010.

BEITES, P. D. **Relatório da disciplina Álgebra Linear**. Concurso para Professor Associado [Texto não publicado]. Universidade da Beira Interior, 2023.

BEITES, P. D.; BRANCO, M. L.; COSTA, C. Esquemas de demonstração para proposições de Álgebra Linear com valor lógico verdade. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 23, n. 1, p. 37-78, 2020. https://doi.org/10.12802/relime.20.2312.

BEITES, P. D.; BRANCO, M. L.; COSTA, C. Erros em esquemas de demonstração com números complexos. **Educação e Pesquisa**, v. 48, e235587, 2022. https://doi.org/10.1590/s1678-4634202248235587

BEITES, P. D.; NICOLÁS, A. P. A note on standard composition algebras of types II and III. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 27, n. 2, p. 955-964, 2017. https://doi.org/10.1007/s00006-016-0668-8

BEITES, P. D.; PEEL, M. A. F.; COSTA, C. Desenho de tarefas baseado em erros com números complexos. **Revista Portuguesa de Educação**, v. 36, e23017, 2023. https://doi.org/10.21814/rpe.25337

BETANCUR-SÁNCHEZ, A.; ROA-FUENTES, S.; BALLESTEROS, S. J. Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: El análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 24, n. 3, p. 245-276, 2021. https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

BREMNER, M. R.; MURAKAMI, L.; SHESTAKOV, I. Nonassociative algebras. In: HOGBEN, L. (Ed.). **Handbook of Linear Algebra**. CRC, 2006. p. 69-1-69-26.

CABRAL, I.; PERDIGÃO, C.; SAIAGO, C. **Álgebra Linear**. Teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos com soluções. 6.ª ed. Escolar, 2021.

COOK, J. P.; ZAZKIS, D.; ESTRUP, A. Rationale for matrix multiplication in Linear Algebra textbooks. In: STEWART, S.; ANDREWS-LARSON, C.; BERMAN, A.; ZANDIEH, M. (Eds.). **Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra**. Springer, 2018. p. 103-125. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_5.

COSTA, C.; CATARINO, P. Da colinearidade no ensino secundário à dependência linear no ensino superior: Que descontinuidades? **Quadrante**, v. 16, p. 147-162, 2007. https://doi.org/10.48489/quadrante.22810

DGES. **Na construção do futuro do Ensino Superior**. 2024. https://www.dges.gov.pt/pt

FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: Development status and directions. **ZDM – Mathematics Education**, v. 45, p. 633-646, 2013. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

GIRALDES, E. F.; FERNANDES, V. H.; SMITH, P. M. **Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica**. 1.ª ed. McGraw Hill, 1995.

GRACIN, D. G. Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 49, n. 7, p. 1003-1024, 2018. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849

GRASSMANN, H. **Extension theory**. AMS, LMS, 2000.

HAREL, G. Variations in Linear Algebra content presentations. **For the Learning of Mathematics**, v. 7, n. 3, p. 29-32, 1987.

HAREL, G. Varities in the use of geometry in the teaching of Linear Algebra. **ZDM – Mathematics Education**, v. 51, p. 1031-1042, 2019. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01015-7

MAGALHÃES, L. T. **Álgebra Linear como introdução à Matemática Aplicada**. 8.ª ed. Texto, 1998.

MARTINS, L.; MARTINHO, M. H. Tipologia de tarefas nos manuais escolares de Matemática: Um estudo com manuais portugueses de 10.º e 11.º ano. **Educação Matemática**, v. 36, n. 1, p. 66-91, 2024. https://doi.org/10.24844/EM3601.03

MATHSCINET. **Mathematical Reviews**. AMS, 2024.

MERRIAM, S. B. **Qualitative research:** A guide to design and implementation. Jossey-Bass, 2009.

MONTEIRO, A. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. McGraw-Hill, 2004.

PONTE, J. P.; SALVADO, C.; FRAGA, A.; SANTOS, T.; MOSQUITO, E. Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. **Quadrante**, v. XVI, n. 1, p. 111-145, 2007. https://doi.org/10.48489/quadrante.22809

RENSAA, R. J.; GREVHOLM, B. A textbook in linear algebra – the use and views of engineering students. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 20, n. 3–4, p. 223-245, 2015. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/20_34_223246_rensaa.pdf

ROBERTSON, E.; O'CONNOR, J. **MacTutor**. 2024. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk

SABININ, L.; SBITNEVA, L.; SHESTAKOV, I. P. (Eds.) **Non-Associative Algebra and its Applications**. CRC, 2006.

SANTANA, A. P.; QUEIRÓ, J. F. **Introdução à Álgebra Linear**. 4.ª ed. Gradiva, 2018.

SANTOS, J. C. **Grupos e álgebras de Lie**. IST, 2011.

SCHAFER, R. D. **An introduction to nonassociative algebras**. Dover, 1995.

SIERRA-VÁSQUEZ, M.; GONZÁLEZ-ASTUDILLO, M. T.; LÓPEZ-ESTEBAN, C. El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. **Educación Matemática**, v. 15, p. 21-49, 2003. https://www.redalyc.org/pdf/405/40515102.pdf

TEIXEIRA, I.; COSTA, C.; CATARINO, P.; NASCIMENTO, M. A utilização da História da Matemática no ensino: Análise de um manual do final do séc. XX. In: RODRIGUES, I.; AZEVEDO, J. (Eds.). **Anais...** 1.º Encontro de História da Ciência no Ensino. UTAD, 2015. p. 205-214. https://repositorio.utad.pt/entities/publication/65c9ed87-6582-4909-9a32-ece48450850c

TOMBER, M. L. A short history of nonassociative algebras. **Hadronic Journal**, v. 2, p. 1252-1387, 1979. https://www.researchgate.net/publication/350211797_A_short_history_of_nonassociative_algebras

VITÓRIA, J.; LIMA, T. P. de. **Álgebra Linear**. Universidade Aberta, 1998.

ZHEVLAKOV, K. A.; SLINKO, A. M.; SHESTAKOV, I. P.; SHIRSHOV, A. I. **Rings that are nearly associative**. Academic Press, 1982.

AGRADECIMENTOS

P. D. Beites agradece a referência de Teixeira *et al*. (2015) a C. Costa.

FINANCIAMENTO

P. D. Beites foi financiada pela FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), projeto UIDB/00212/2020 do CMA-UBI e projeto UIDB/00194/2020 do CIDTFF-UA.

COMO CITAR - ABNT
Patrícia Damas Beites, Thiago Beirigo Lopes. Desvendando a Álgebra não associativa em referências portuguesas de Álgebra Linear. **Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 24, n. 38, *e*25011, jan./dez., 2025. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174

COMO CITAR - APA
Patrícia Damas Beites, Thiago Beirigo Lopes. (2025). Desvendando a Álgebra não associativa em referências portuguesas de Álgebra Linear. *Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências*, *24*(38), *e*25010. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.4174

HISTÓRICO
Submetido: 18 de janeiro de 2025.
Aprovado: 27 de maio de 2025.
Publicado: 13 de julho de 2025.