Areté
Revista Amazônica de Ensino de Ciências

POTENCIALIDADES DE UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO CÁLCULO PARA O ENSINO DOS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

POTENTIAL OF A HISTORICAL APPROACH TO CALCULUS FOR TEACHING THE CONCEPTS OF LIMIT AND CONTINUITY OF A FUNCTION

POTENCIALES DE UN ENFOQUE HISTÓRICO DEL CÁLCULO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias[*]
João Cláudio Brandemberg[**]
Mônica Suelen Ferreira de Moraes[***]

RESUMO

Este ensaio apresenta uma discussão sobre a articulação da história da matemática e ensino de matemática. Para tanto, apresenta-se a referida temática à luz da literatura da área, inclusive, em meio às múltiplas perspectivas que podem nortear práticas educativas que façam uso da história no processo de ensino e aprendizagem, dentre elas, a de Brademberg (2022), Mendes (2022a, 2022b, 2023), Chaquiam (2017), e Pereira e Saito (2019). Destaca-se, também, um desenvolvimento histórico do Cálculo, por meio do qual enfatiza-se a construção de diferentes conceitos, dentre eles, o de limite e continuidade de uma função. Por fim, são elencadas sugestões de temas a serem discutidos a partir de cenários históricos específicos, como por exemplo, o de compreensões equivocadas sobre limite e continuidade, encontradas nos registros de Leibniz e Euler.

Palavras-chave: História da Matemática. Ensino de Matemática. Limite de uma função. Continuidade de uma função.

ABSTRACT

This essay presents a discussion on the articulation of the history of mathematics and mathematics teaching. To this end, the aforementioned theme is presented in light of the literature in the area, including the multiple perspectives that can guide educational practices that make use of history in the teaching and learning process, among them, that of Brademberg (2022), Mendes (2022a, 2022b, 2023), Chaquiam (2017), and Pereira and Saito (2019). It also highlights a historical development of Calculus, through which the construction of different concepts is emphasized, among them, that of limit and continuity of a function. Finally, suggestions for topics to be discussed are listed based on specific historical scenarios, such as the misconceptions about limits and continuity found in the records of Leibniz and Euler.

[*] Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA). Professora da Universidade Federal do Pará (UFPA), Salinópolis, Pará, Brasil. E-mail: alicemessias@ufpa.br. ORCiD: https://orcid.org/0000-0003-2853-1965
[**] Doutor em Educação (UFRN). Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: brand@ufpa.br. ORCiD: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550
[***] Doutora em Educação em Ciências Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Professora da Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, Tocantins, Brasil. E-mail: monicamoraes@uft.edu.br. ORCiD: https://orcid.org/0000-0001-8806-2027

Keywords: History of Mathematics. Teaching Mathematics. Limit of a function. Continuity of a function.

RESUMEN

Este ensayo presenta una discusión sobre la articulación de la historia de las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas. Para ello, se presenta el tema antes mencionado a la luz de la literatura en el área, incluyendo, entre las múltiples perspectivas que pueden orientar las prácticas educativas que hacen uso de la historia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre ellas, la de Brademberg (2022), Mendes (2022a, 2022b, 2023), Chaquiam (2017) y Pereira y Saito (2019). Se destaca también un desarrollo histórico del Cálculo, a través del cual se enfatiza la construcción de diferentes conceptos, entre ellos, el de límite y continuidad de una función. Finalmente, se enumeran sugerencias de temas a ser discutidos a partir de escenarios históricos específicos, como por ejemplo, las comprensiones erróneas sobre límite y continuidad encontradas en los registros de Leibniz y Euler.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas. Enseñanza de Matemáticas. Límite de una función. Continuidad de una función.

1 INTRODUÇÃO

"Como desenvolver competências e habilidades no ensino de matemática, de modo a melhor esclarecer seu desenvolvimento conceitual, e assim promover uma aprendizagem mais consolidada desse campo disciplinar?". Tal questionamento, levantado por Mendes (2022a, p. 33), reflete uma preocupação de muitos pesquisadores em Educação Matemática, sobretudo, no que se refere à busca pela superação de dificuldades relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem.

Frente a esse cenário, a História da Matemática tem sido incorporada, cada vez mais, ao contexto de sala de aula em diferentes segmentos de ensino e sob diferentes perspectivas, conforme identificado em Mendes (2015; 2022a; 2022b; 2023), Brandemberg (2010; 2021; 2022), Chaquiam (2017; 2022), Pereira e Saito (2019), dentre outros.

A História da Matemática se apresenta, nesse sentido, como um forte aporte, uma vez que pode vir a auxiliar o ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos, apresentando e situando no tempo ideias e problemas matemáticos, atrelados às suas motivações e antecedentes históricos e, ainda, relacionando problemas do passado a problemas da atualidade (Brandemberg, 2022).

Considerando que a articulação entre História da Matemática e Ensino de Matemática tem sido recorrentemente discutida e explorada em diferentes pesquisas nas últimas décadas e, tendo em vista sua relevância para uma compreensão mais dinâmica e, sobretudo, humana sobre matemática, objetiva-se, neste ensaio teórico, ampliar a discussão acerca dessa temática, a partir da literatura da área e exemplificações no âmbito do Cálculo, mais especificadamente, no que tange aos conceitos de limite e continuidade de uma função.

2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA[1] & ENSINO: O QUE DIZ A LITERATURA?

O ensino de conteúdos matemáticos a partir do uso da história pode, segundo Borges e Cavalari (2021), auxiliar na compreensão de conceitos, na construção de processos mentais, tais como a abstração e generalização, além de possibilitar a formação de um olhar mais crítico sobre os conhecimentos matemáticos frente à realidade.

Nesse sentido, Mendes (2023) enfatizou ser prudente desenvolver a aprendizagem a partir de elementos históricos que permitam o exercício da formalização matemática e, a partir dela, estabelecer um elo efetivo entre concreto e formal. O autor destaca, inclusive, que seja possível – enquanto discente ou docente – vivenciar experiências de aprendizagem mediante o uso didático da história e que, tal prática, pode viabilizar o desenvolvimento do espírito investigativo, da criatividade e de habilidades matemáticas que contribuem para a busca por uma autonomia intelectual.

Mendes (2023) reiterou que a aprendizagem matemática mediante a construção histórica de processos possibilita que os estudantes desenvolvam uma concepção mais dinâmica sobre matemática que, por sua vez, passa a ser entendida como um conjunto de elementos em constante evolução, fato que permite sua conexão com outras áreas de conhecimento. Fauvel e Maanem (2000) destacaram que a articulação entre História e Ensino permite a superação de possíveis "fraturas epistemológicas" oriundas de construções matemáticas e, consequentemente, de obstáculos cognitivos relacionados à matemática escolar, fato que possibilita o amadurecimento matemático do indivíduo.

Brandemberg (2022) reiterou que a utilização de elementos históricos na construção de conhecimentos matemáticos viabiliza a interação do sujeito com os objetos em estudo. Tal interação é possível, em virtude da matemática ser entendida como uma ciência essencialmente humana e suas ideias, fruto de necessidades práticas, sociais, culturais e econômicas. Em

[1] Para evitar repetições, os termos História da Matemática e História serão utilizados indistintamente nesse texto.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

direção semelhante, Chaquiam (2017) destacou que o uso didático da história da matemática permite o conhecimento da origem e desenvolvimento de conceitos, bem como promove um resgate da cultura, fato que contribui para sua relação com as demais ciências.

O viés cultural da história tem sido amplamente discutido na literatura (Mendes, 2022a; 2022b). Os autores apontam que certo conhecimento sobre a história em determinado contexto, permite a reconstrução matemática, bem como a valorização da capacidade criativa da sociedade no decorrer dos tempos. Isto é, ressignifica-se a matemática enquanto produto cultural, social e científico.

Admite-se, portanto, que a utilização da história em situações de ensino e aprendizagem, permite que os sujeitos observem características matemáticas específicas, bem como identifiquem elementos próprios de um conhecimento, uma vez que atividades humanas são sempre um entrelaçamento de ações que explicitam uma realidade matemática construída.

Ressalta-se, ainda, que muito do que tem sido discutido acerca dos aspectos positivos do uso da história para o ensino de matemática está em acordo com o que fora apontado por Fauvel (1997). Para o autor, tal prática pode desmistificar a matemática, viabilizar a aproximação multicultural enquanto se aprende novos conceitos, levar à compreensão de conceitos a partir de sua evolução histórica, facilitar a busca, no passado, para solucionar problemas atuais, projetando-os para o futuro, promover investigações históricas, dentre outras situações.

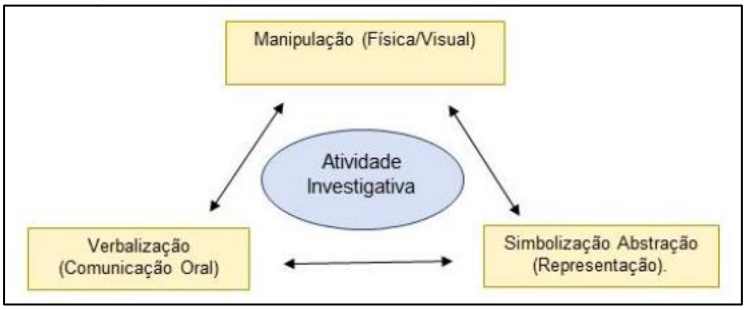
Afiança-se, desse modo, que o uso didático da história no contexto do ensino e aprendizagem de matemática permite humanizá-la, bem como promover sua formalização, e evidenciar seu aspecto unificador frente ao seu próprio campo e à outras áreas de conhecimento. Por isso, faz-se necessário ampliar reflexões no que tange à pluralidade de perspectivas vinculadas a esse processo, conforme apresentado na seção subsequente.

3 PERSPECTIVAS DO USO DA HISTÓRIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Mendes (2022a, 2022b) norteou-se nas investigações históricas como princípio para promover situações de ensino e aprendizagem de matemática. Para o autor, o uso didático de atividades investigativas deve ser pautado em pesquisas históricas, bem como em metas de aprendizagem previamente estabelecidas pelo professor e/ou pesquisador. Mendes (2022a, 2022b) sugeriu que tal prática seja estruturada conforme o modelo de atividades de Dockweiler

(1996), conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 1 – Infográfico descritor do Modelo de Dockweiler



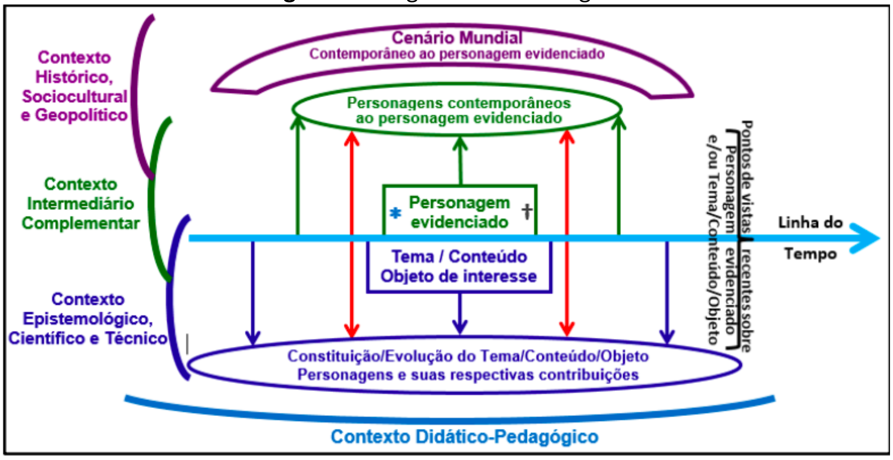
Fonte: Mendes (2022a, p. 13)

Na representação triangular de Dockweiler (1996), observa-se que é, primeiramente, mediante manipulações físicas ou visuais que um conhecimento é concebido. Em seguida, este deve ser verbalizado e discutido em sala de aula, sob a orientação do professor, com o intuito de representá-lo por meio da simbolização e abstração. Mendes (2022a, 2022b) destaca que as atividades investigativas podem ser adaptadas conforme este modelo e chama a atenção para a necessidade de considerar múltiplas interpretações de um mesmo objeto, sob a ótica de diferentes matemáticos e de diferentes épocas de seu processo de desenvolvimento histórico-conceitual.

Brandemberg (2022) sugeriu o uso da componente histórica no âmbito do ensino a partir de textos históricos. Nessa perspectiva, o autor aponta que as atividades organizadas a partir desses textos devem considerar o conteúdo matemático a ser estudado e estar em consonância com temas e objetivos bem definidos. Segundo Brandemberg (2022), os textos históricos – enquanto produção sociocultural – quando utilizados como material didático, possibilitam que os estudantes compreendam elementos do desenvolvimento histórico-conceitual relativos aos objetos em estudo, tendo em vista, inclusive, seus processos de construção representacional, por meio das características de linguagem e notação simbólicas utilizadas e, também, de traços de uma determinada época, fato que contribui para a apreensão de ideias matemáticas, para o amadurecimento intelectual e para a relação entre problemas do passado e do presente.

Chaquiam (2022) sugere o uso didático da história por meio do diagrama metodológico e do texto produzido a partir dele. Para o autor, tal diagrama possibilita que o estudante "enxergue" a amplitude do processo de evolução de determinado objeto matemático, considerando diferentes elementos que o constituíram para que, a partir deles, seja possível construir uma compreensão matemática mais madura e completa sobre matemática.

Figura 2 – Diagrama Metodológico



Fonte: Chaquiam (2022, p. 11)

Conforme a figura 2, o diagrama metodológico é organizado em quatro contextos: o contexto histórico, sociocultural e geopolítico, o contexto intermediário complementar, o contexto epistemológico, científico e tecnológico, e o contexto didático-pedagógico. Esses contextos norteiam diferentes dimensões acerca de um tema/objeto/conceito matemático, as quais exercem influência na elaboração do texto, para o qual o Chaquiam (2022) sugere a seguinte ordem de construção: (i) Discorre-se sobre o cenário mundial; (ii) Escreve-se sobre os personagens contemporâneos ao evidenciado, enfatizando suas contribuições; (iii) Apresenta-se o personagem evidenciado; (iv) Escreve-se sobre a evolução do tema; (v) Apresentar-se pontos de vista recentes sobre o tema e/ou personagem evidenciado ou aspectos relevantes para discussões didático-pedagógicas, ou ainda, elabora-se atividades sobre a temática.

O uso de instrumentos científicos e matemáticos no contexto do processo de apreensão de conhecimentos matemáticos tem sido discutido na literatura (Saito, 2015; Pereira e Saito, 2019). Tal perspectiva tem se mostrado relevante, uma vez que possibilita que os estudantes, mediante orientação do professor, construam tais conhecimentos por meio da matemática incorporada ao instrumento e manipulada em seu manuseio.

Para Saito (2015) e Pereira e Saito (2019), o ensino estabelecido por meio de instrumentos permite que professores e alunos discutam sobre o movimento do pensamento matemático inerente ao seu uso, fato que contribui para um aprendizado de ordem prática de uma pluralidade de ideias matemáticas envolvidas. Por isso, diz-se que a construção do instrumento não se limita a uma simples réplica. Para desenvolver tais atividades, os autores reiteram a necessidade de se basear em documentos históricos, isto é, textos, imagens, fotos, dentre outros, os quais devem ser analisados, considerando o tratamento didático dado a eles, sua intencionalidade, um plano de ação e formas de desenvolvimento (Pereira e Saito, 2019).

Conforme destacado nesta seção, evidencia-se diferentes perspectivas acerca do uso didático da história para fins de promover a aprendizagem matemática em diferentes segmentos de ensino. Para fins de exemplificação, apresenta-se na seção subsequente uma abordagem histórica do Cálculo, dos primórdios à formalização, construída com o intuito de contextualizar, para estudantes de graduação, aspectos relativos ao desenvolvimento dessa área de conhecimento. Em seguida, faz-se uma discussão sobre como certas manifestações históricas podem ser utilizadas de modo a auxiliar no processo de apreensão de conceitos como o de limite e continuidade de uma função.

4 UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO CÁLCULO: DOS PRIMÓRDIOS À FORMALIZAÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo foi marcado por séculos de indecisões e conflitos até a real formalização dos conceitos matemáticos envolvidos. Evidencia-se, nesse sentido, a contribuição e o empenho intelectual de muitos estudiosos, razão pela qual seria impossível de atribuir seus avanços conceituais a uma única figura.

Pode-se dizer que sua origem esteve centrada nas dificuldades de matemáticos gregos antigos em expressar razões e proporcionalidades de segmentos de retas em termos numéricos (Messias, 2013; Brandemberg; Messias, 2019). Além disso, durante a idade média, o estudo quantitativo sobre variabilidade foi empreendido, fato que possibilitou a introdução de novos campos de estudo, tais como a geometria analítica e a representação sistemática de quantidades variáveis. A partir de então "a aplicação do novo tipo de análise agregado à livre utilização dos sugestivos infinitesimais e à aplicação mais extensiva do conceito de número levou em um curto período aos algoritmos de Newton e Leibniz, que constituíram o cálculo (Boyer, 1959, p. 4, traduzido pelos autores).

As concepções de Leibniz, quanto ao discreto, e a de Newton, quanto ao contínuo,

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

recaíram na teoria do Cálculo, que posteriormente define melhor o que eram os números reais e a ideia de limite (Mendes; Moraes, 2020). Vemos que ambas as abordagens de Newton e Leibniz são caminhos a invenção do Cálculo. É importante destacar que mesmo com os algoritmos desenvolvidos por Newton e Leibniz, não havia clareza no que concerne à base lógica e formal do assunto. Somente no século XVIII pode-se dizer que o Cálculo se libertou de intuições acerca de movimento contínuo e grandezas geométricas, sendo no século XIX – com as definições rigorosas de número e contínuo – que o conceito de derivada foi constituído como fundamental e uma base mais sólida desse campo de estudo foi estabelecida.

Atualmente, as definições dos tópicos de Cálculo, bem como as operações envolvidas se encontram tão esclarecidas em livros da área que as dificuldades relativas ao desenvolvimento histórico dos conceitos são, muitas vezes, desconsideradas (Messias, 2013). Em contrapartida, mais de 2500 anos de tentativas foram necessários para o desenvolvimento, sistematização e formalização do Cálculo, conforme será destacado nesta seção.

4.1 Concepções na Antiguidade

Em se tratando da matemática na Antiguidade, destacam-se alguns resultados que podem ser tomados como ponto de partida até a formalização do Cálculo. Um importante resultado, nesse aspecto, foi a teoria dos pitagóricos sobre a aplicação de áreas que os permitia afirmar se uma figura delimitada por segmentos de retas era maior, equivalente ou menor que uma segunda figura. Essa superposição de uma área sobre a outra pode ser considerada um primeiro passo, na tentativa de definir de maneira exata a noção de área.

Os paradoxos Zenão de Elea (sec. V a. C) também afetaram as concepções da época, tendo em vista a dificuldade que se tinha em relacionar determinados fenômenos à noção de continuidade. Tais paradoxos também ocupam uma posição de destaque nos primórdios da história do desenvolvimento do Cálculo.

No paradoxo de Aquiles e a tartaruga, por exemplo, observa-se que, ao disputar uma corrida com uma tartaruga, Aquiles será derrotado se a tartaruga largar determinada distância à frente. Isso porque:

> [..] assim que Aquiles alcançar a posição inicial da tartaruga, ela já se deslocou dali,

> mesmo que seja pouca coisa. Quando Aquiles chegar ao local onde a tartaruga devia se encontrar agora, esta já se adiantou outro pequeno espaço, e assim por diante, de modo que a tartaruga sempre está à frente de Aquiles, até cruzar vitoriosa a reta de chegada (Brolezzi, 1996, p. 22 – 23).

Paradoxos, tais como o enunciado, poderiam ser respondidos a partir de conceitos do Cálculo Diferencial, isso porque envolvem as noções de continuidade, limites e infinito que, por sua vez, eram abstrações extrínsecas ao pensamento matemático grego. Conforme Bell (1948) estas foram as principais dificuldades encontradas pelos primeiros que se ocuparam com assuntos relacionados à continuidade e ao infinito. O autor ainda afirma que muitos compartilhavam das ideias de Zenão sobre o fato da soma de números infinitos de quantidades maiores que zero resultar em um número suficientemente grande, deixando evidente a lacuna e a dificuldade dos gregos em questão de conhecimento sobre infinitésimos.

Eves (2011) aponta que o sofista Antífon (c. 430 a.C.) contribuiu para problemas envolvendo a quadratura do círculo, antecipando a ideia de que ao duplicar várias vezes os lados de um polígono chegaria ao ponto em que a área desse polígono teria uma diferença mínima em relação à área do círculo. Esse procedimento foi muito criticado por matemáticos da época, argumentando que se uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente esse processo não teria fim, impossibilitando o cálculo dessa área.

De acordo com Bell (1948), essa abordagem de Antífon continha o conhecido método de exaustão creditado a Eudoxo. Depois que Eudoxo demonstrou esse método ficou notável que não havia necessidade de considerar quantidades minúsculas infinitas, pois, para fins matemáticos, cada vez que se dividem quantidades pequenas, elas se tornam tão pequenas que pouco influenciava no resultado.

O método de exaustão foi de grande relevância na trajetória de desenvolvimento do Cálculo. No entanto, é importante ressaltar que apesar de os argumentos empregados serem equivalentes àqueles empregados na prova da existência do limite, esse método era completamente geométrico, em virtude de o conhecimento sobre infinito contínuo não ter sido desenvolvido durante a Antiguidade. Nesse sentido, observa-se que:

> [...] O método da Exaustão corresponde a um conceito institucional, descrito em termos de figuras mentais da percepção sensorial de mundo. A noção de limite, por outro lado, deve ser percebida como um conceito verbal, a explicação na qual é dada em termos de palavras e símbolos – tais como número, sequencia infinita, menor que,

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

> maior que – diz respeito não a qualquer visualização mental, mas somente em termos de elementos primários não definidos (...) apesar da ideia de limite aparecer na história da matemática nos tempos antigos, a formulação rigorosa desse conceito não aparece em trabalhos antes do século XIX – e certamente não no método grego de exaustão (Boyer, 1959, p. 36 – 37, traduzido pelos autores).

Baron e Bos (1985) assinalam que Arquimedes (287 – 212 a.C.) foi o primeiro a evidenciar modos de explicitação demonstrativa a esse respeito, com certa rigorosidade ao se utilizar de procedimentos experimentais que remetem a noção do que atualmente concebemos como redução ao absurdo. Embora fosse evidente a ideia prática da maneira de expressão experimental atribuída ao trabalho de Arquimedes, o tipo de “prova demonstrativa” praticada não era suficiente na aceitação da Matemática grega, sendo então necessário se utilizar de duas provas experimentais atualmente concebidas como absurdo duplo, prática essa, tratada posteriormente como exaustão por Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667).

O procedimento tornou-se comum e tais provas continuaram sendo essenciais até o final do século XVII, quando os matemáticos passaram da repetição constante para a prática de passagem direta ao limite, iniciando um processo de superação de um obstáculo epistemológico (Moraes, 2021). Desse modo, evidencia-se que seus métodos cinemáticos e infinitesimais se constituíram como bases fundamentais para as descobertas de Newton e Leibniz no século XVII.

4.2 Concepções na Idade Média

As contribuições medievais para o desenvolvimento do Cálculo pautaram-se, principalmente, em especulações, do ponto de vista filosófico, sobre infinito, infinitesimal e continuidade, além do estudo acerca do movimento e variabilidade. Segundo Baron e Bos (1985), a Matemática na Europa Medieval era um objeto de discussões filosóficas fortemente influenciadas por Aristóteles (*c.* 384-322 a.C.). Eles ainda apontam que a discussão era em torno da natureza das quantidades infinitas relacionadas com o mundo físico e matemático. Dentre as discussões, Aristóteles distingue claramente o infinito atual e o potencial:

> Ele argumenta que, como o mundo é finito, nenhuma grandeza física pode, por processos multiplicativos, tornar-se infinita. O processo de divisão, por outro lado, pode ser continuado eternamente e não existe nenhum estágio não ultrapassável. Ele rejeita a noção de um contínuo composto ou de pontos matemáticos ou de qualquer outra espécie de indivisíveis (Baron; Bos, 1985, p. 56, v. 1).

Dentre aqueles que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo neste período, destaca-se Richard Suiseth (dados incertos), cujos estudos foram considerados um primeiro esforço para tornar quantitativamente compreensível alguns conceitos físico–matemáticos. Além disso, ele antecipou que as definições de taxas de variação uniforme e não uniforme deveriam ser expressas numericamente, fato que se consolidou de forma rigorosa somente depois do desenvolvimento do conceito de limite. A associação do estudo da variação à representação de coordenadas, estabelecida por Nicole Oresme (*c.* 1323 – 1382), também teve grande importância para o avanço da Análise Matemática. O cálculo integral primitivo foi desenvolvido então por volta do século XIV, marcado principalmente pelos estudos de Nicole Oresme (c. 1323 – 1382), bispo de Lisieux.

> Oresme associava os instantes de tempo dentro do intervalo aos pontos de um segmento de reta horizontal (chamado "linha de longitudes"), e para cada um desses pontos erguia (num plano) um segmento de reta vertical ("latitude"), cujo comprimento representava a velocidade do objeto no tempo correspondente. Ao conectar as extremidades dessas perpendiculares ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo – num dos mais antigos exemplos da história da matemática do que hoje seria chamado "gráfico de uma função" (Boyer, 1992, p. 9).

Oresme observou que a área sob este gráfico representaria a distância percorrida, visto que seria a soma de todos os incrementos das distâncias correspondentes às velocidades instantâneas (Boyer, 1992). Sobre as contribuições medievais no âmbito do Cálculo:

> (...) foram, sobretudo, na forma de especulações, largamente sob ponto de vista filosófico com referência ao estudo do movimento a da variabilidade. Essas aquisições tiveram papel fundamental para o desenvolvimento de conceitos e métodos do Cálculo, pois conduziram os primeiros descobridores do assunto a associar a geometria estática dos gregos às representações gráficas de variáveis, bem como à ideia de continuidade (Boyer, 1959, p. 94, traduzido pelos autores).

Ressalta-se que, apesar de muitas das contribuições para trajetória do desenvolvimento do Cálculo terem sido estabelecidas após a Idade Média, este período é considerado de suma importância, uma vez que preparou terreno para os estudos posteriores que anteciparam, e em muito influenciaram, as descobertas de Newton e Leibniz no século XVII, bem como as formalizações de Cauchy e Weirstrass no século XIX.

4.3 Século XVIII e as contribuições que antecederam o Cálculo

Nos anos que antecederam as descobertas de Newton e Leibniz, destacam-se uma pluralidade de contribuições a partir de uma ampla retomada de interesse pelas obras de Arquimedes, tendo o conceito de indivisível em geometria um papel salutar. De acordo com Baron e Bos (1985), Simon Stevin (1548 - 1620) analisava a Matemática sempre para fins práticos, e se interessou pelo problema da determinação de centros de gravidade, dando assim o primeiro passo radical para modificar a estrutura de demonstração de Arquimedes. Em sua demonstração, embora se mantivesse o método de exaustão, o elemento de redução era, aos poucos, substituído pela passagem direta ao limite.

Johannes Kepler (1571 - 1630) e Galileo Galilei (1564 - 1642) foram os primeiros a abandonar a estrutura de demonstração proposta por Arquimedes, introduzindo assim, o uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas. Gilles Persone de Roberval (1602 - 1675) considerou justificável o uso dos indivisíveis, embora alguns matemáticos tenham rejeitado seu uso, escrevendo o *Tratado dos Indivisíveis* baseando sua discussão nos números figurados de Pitágoras (Moraes 2021).

Em seu livro *Astronomia Nova*, Johann Kepler, apresenta uma computação que se assemelha à notação moderna $\int_0^\theta sen\theta d\theta = 1 - cos\theta.$ Já Cavalieri (1598 – 1647), em seus estudos relativos à soma dos cubos dos segmentos de um paralelogramo, obteve um resultado equivalente ao que, atualmente, expressa-se como $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. É claro que Cavalieri não apresentava nenhuma concepção clara acerca dos conhecimentos em termos de diferencial e integral. Isso porque, seus resultados não apresentavam elementos algébricos e aritméticos que levaram, a priori, às regras de procedimentos do Cálculo e, a posteriori, às definições de diferencial e integral (Messias, 2013).

Cavaliere aplicou a ideia dos indivisíveis a uma ampla variedade de problemas suscitados por outros matemáticos como Pierre de Fermat (1601 – 1665), Roberval e Évangelista Torricelli (1608 – 1647), podendo afirmar assim que o método dos indivisíveis não era propriamente de Cavalieri, pois estava sendo amplamente usado por pensadores matemáticos da época. Dentre os resultados alcançados por Torricelli, destacam-se a aplicação dos métodos de exaustão, dos indivisíveis e a composição de movimento que são antecipações marcantes da

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

nova análise. Além disso, Torricelli realizou diversos estudos relacionados aos problemas de quadraturas e tangentes e, inclusive, reconhecia que um era o inverso do outro. Em contrapartida, não estabeleceu nenhum algoritmo que pudesse ser aplicado em todos os casos, haja vista que não via seus métodos como constituintes de um novo tipo de análise.

Gregory de St. Vincent também trouxe contribuições para o desenvolvimento histórico-conceitual do Cálculo. Nessa perspectiva, é possível que tenha sido dele a primeira sentença explícita sobre estar definida, em séries infinitas, uma grandeza a ser chamada de limite de uma série. Aliado a isso, reconheceu que o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga poderia ser explicado em termos de limite de uma série infinita (Boyer, 1959).

A consequência lógica dessas ideias foi a geometria analítica de Fermat e René Descartes (1596 - 1650). Descartes publicou *La géometrie* em 1637, somente dois anos depois da publicação da *Geometria indivisibilus*, de Cavalieri, mudando inevitavelmente o curso da análise infinitesimal. Com isso, a geometria pura foi sendo ofuscada e a análise infinitesimal entrou num processo de aritmetização (Moraes, 2021).

Fermat, com seu método para determinar máximos e mínimos, alcançou notoriedade no cenário de desenvolvimento do Cálculo. Em seus estudos, dados um segmento de reta de comprimento a e uma distância x a partir de uma das extremidades desse segmento a, a área nos segmentos x e $a - x$ será $A = x(a - x)$. Se, ao invés da distância x, fosse considerada uma distância $x + E$, a área seria $A = (x + E)(a - x - E)$. Dessa maneira, para a área máxima os dois valores seriam iguais, e os pontos x e $x + E$, coincidiriam. Mesmo sem conhecer a noção de limite, ele igualava $f(x)$ e $f(x+E)$ e percebia que os valores eram quase iguais. Em seguida, dividia tudo por E e resolvia E = 0, encontrando as abscissas dos pontos máximo e mínimo da função. Em outras palavras, fazia $\lim\limits_{E \to 0} \dfrac{f(x+E) - f(x)}{E}$ e igualava a zero (Messias, 2013).

Os trabalhos de Isaac Barrow, ainda que dispostos em termos de construções geométricas, também tiveram grande relevância para história do Cálculo. Seus resultados incluem vários teoremas sobre os problemas de tangentes e quadraturas, além do reconhecimento do significado da relação entre esses problemas. Caso elas tivessem sido estudadas em termos do Cálculo, seriam equivalentes a inúmeras regras e teoremas da diferenciação e integração, inclusive ao Teorema Fundamental do Cálculo.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

Admite-se, ainda, que dentre os estudiosos que foram destacados, além de outros que possam ter antecipado as descobertas do Cálculo, Barrow e Fermat foram os que mais se aproximaram da nova análise. Nesse sentido, Boyer (1959) destacou que:

> (...) Fermat inventou métodos analíticos equivalentes a ambos, diferenciação e integração, mas aparentemente não percebeu o significado da inter-relação entre esses problemas. Por outro lado, Barrow descobriu a relação fundamental inversa, mas por conta de não ter desenvolvido profundamente as possibilidades de representação analítica das operações envolvidas, ele era incapaz de fazer um uso efetivo disso (Boyer, 1959, p. 184, traduzido pelos autores).

Conforme destacado nesse tópico, foram inúmeros os esforços que levaram ao desenvolvimento do Cálculo e, frente às contribuições dos estudiosos envolvidos com essa Nova Análise, seria inevitável a descoberta desse campo de estudo. Essa trajetória foi marcada, sobretudo, pelos estudos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibiniz, cujas contribuições são apresentadas a seguir.

4.4 Newton e Leibniz e a descoberta do Cálculo

A descoberta do Cálculo é atribuída a Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), em virtude de terem inventado – independente um do outro – algoritmos universalmente aplicáveis que, em sua essência, assemelham-se com aqueles empregados atualmente no Cálculo, cujas concepções de derivada e integral se encontram logicamente desenvolvidas. Todavia, suas descobertas não são apresentadas com o rigor das definições e ideias características dos tempos atuais, já que somente no século XIX definições rigorosas foram elaboradas nesse sentido.

As primeiras manifestações de Newton sobre o Cálculo constam em seu *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Boyer, 1959). Nesse estudo, ele não se expressava explicitamente em termos da ideia e/ou notação fluxionária, mas encontrou quadraturas de curvas, norteando-se nas noções geométrica e analítica de *infinitamente pequeno*. Em *Methodus fluxionum et serierum* infinitarum, seu segundo trabalho contendo aspectos referente ao Cálculo, Newton estabeleceu os conceitos de fluxões, que seria a taxa de geração, e de fluentes constituída pela quantidade gerada. Neste livro, expõe-se o problema fundamental do

Cálculo: Dada uma relação de quantidade, encontrar a relação do fluxão dessa quantidade e vice-versa (Edwards, 2009).

Em seu *De quadratura curvarum*, Newton demonstrou mais clareza no que se refere aos elementos essenciais da derivada, enfatizando a ideia de função de uma variável, a formação da relação entre as taxas, a variável independente e a função e a determinação do limite dessa relação quando as taxas se aproximam de zero. Sobre a noção de limite, Newton apresentou a seguinte definição: “Quantidades, e razões de quantidade, os quais em qualquer tempo finito convergem continuamente á igualdade, e antes do fim daquele tempo se aproximam cada vez mais uma da outra que, finalmente, tornam-se iguais” (Boyer, 1959, p. 197, traduzido pelos autores).

Em linhas gerais, pode-se dizer que as manifestações de Newton sobre a Nova Análise são caracterizadas por três interpretações: Uma em termos de infinitesimais, conforme apresentado em seu *De analysi*, outra em termos de razões ou limites, conforme destacado em seu *De quadratura* e, finalmente, aquela em termos de fluxões, apresentada em seu *Methodus fluxionum*.

Leibniz, de forma independente, desenvolveu seu método para determinar somas e diferenças de infinitesimais, caracterizando-o por uma notação própria: $\int xdx$ para as “somas” e dx para as “diferenças”. Dentre as manifestações de Leibniz sobre o Cálculo, destacam-se que, assumindo x e y como sendo $x + dx$ e $y + dy$, respectivamente, ele evidenciou que $d(xy) = xdy + ydx$ e $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Além disso, ao perceber que a “diferença” de x^n seria x^{n-1} e, sabendo que as “somas” eram o inverso das “diferenças”, determinou que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Sobre a ideia de limite, Leibniz a justificava a partir da lei de continuidade (Messias, 2013). Sabe-se, entretanto, que a lei de continuidade deve ser definida em termos de limites, fato que demonstra que sua ideia sobre contínuo era vaga. Além disso, evidencia-se que, somente depois do desenvolvimento do conceito de número real, foi possível interpretar tanto o Cálculo de Newton quanto o de Leibniz em termos de limites, ou seja, até o século XVII a ideia de limites não foi estabelecida pertinentemente. Atribui-se à notação de Leibniz um papel de suma importância para a base lógica do Cálculo, sendo mantida atualmente a sua utilização.

Newton e Leibniz chegaram à elaboração de seu Cálculo por caminhos epistemológicos diferentes. Não só diferentes na linguagem com que ambos expressaram suas ideias fundamentais acerca dos conceitos fundantes, como também em termos de concepção, o que pode se verificar uma diferença grande entre os trabalhos deles (Moraes, 2021). Tanto Newton quanto Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo.

Quanto aos fundamentos do novo conhecimento, Newton deixava evidente algumas oscilações em suas explicações quando se referia, por vezes, aos infinitesimais, outras aos limites, e ainda, a uma intuição física básica, sendo esta última abordagem a mais adotada posteriormente. Por outro lado, Leibniz e seus seguidores basearam o desenvolvimento da teoria sobre os diferenciais infinitamente pequenos, de primeira e segunda ordem.

Finalmente, é importante destacar que os trabalhos de ambos, Newton e Leibniz, apresentam os procedimentos essenciais do Cálculo, ainda que tais contribuições não tenham se manifestado tão explicitamente quanto à clareza das concepções envolvidas. São essas manifestações, relacionadas às concepções da Nova Análise, que são apresentadas a seguir.

4.5 Século XVIII: um século rumo à formalização do Cálculo.

Conforme mencionado, Newton e Leibniz tiveram um papel importante para o Cálculo, pois ambos foram os primeiros a desenvolver algoritmos universalmente aplicáveis, cuja essência assemelha-se aos métodos utilizados atualmente. Por isso, o título de “inventores do Cálculo” lhes é dado com incontestável coerência. Em contrapartida, sabe-se seus trabalhos relacionados ao Cálculo não apresentavam rigor e clareza em suas definições e, portanto, havia a necessidade de buscar esse rigor matemático para esclarecer as concepções envolvidas na Nova Análise. Dentre os que se dedicaram à tentativa de fundamentação teórica do Cálculo, destacam-se Benjamin Robins (1707 – 1751), Leonhard Euler (1707 – 1783) e Jean le Rond d’Alembert (1717 – 1783).

As manifestações de Robins sobre o Cálculo constam em alguns artigos publicados em periódicos da época, como por exemplo, o de título *A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton’s methods of fluxions and of prime and ultimate ratios* (Boyer, 1959). Dentre suas considerações, verificou-se que ele distinguiu duas interpretações concernentes ao trabalho de Newton, sendo uma relacionada às fluxões e outra às razões iniciais e finais. Estes são, respectivamente, caracterizados por facilitar as demonstrações e pelo rigor matemático. No que concerne às suas considerações sobre limites, verifica-se que:

> (...) ele reconheceu que a frase 'a razão final de quantidades desaparecidas' era uma expressão figurativa, referindo – se não à última razão, mas à 'uma quantidade fixa na qual uma quantidade variável, mediante um contínuo aumento ou diminuição, pode continuamente se aproximar,... munida da quantidade variável essa aproximação pode diferir uma da outra tão pouco quanto qualquer quantidade possa ser atribuída',... 'apesar de nunca poderem ser absolutamente iguais' (Boyer, 1959, p. 230, traduzido pelos autores).

Euler foi responsável pelo estudo e classificação sistemáticos relacionados às funções elementares, bem como suas diferenciais e integrais. Segundo Boyer (1959), o desenvolvimento do Cálculo no decorrer do século XVIII se caracterizou por uma visão de funcionalidade atrelada não a um reconhecimento conceitual de relação, mas somente como uma representação formal, na qual a notação de Leibniz se encontrava perfeitamente adaptada. No que diz respeito à visão de Euler sobre os princípios do Cálculo, afiança-se que:

> (...) como Euler se restringiu às funções elementares, ele não se envolveu com as sutis dificuldades conectadas às noções de infinito e continuidade (...). Apesar de suas visões sobre os princípios fundamentais do cálculo não apresentarem precisão e rigor, apresentada pela matemática no século seguinte, a tendência formalística que seu trabalho inaugurou, estava por libertar a nova análise da corrente geométrica. Além de a interpretação aritmética ter sido mais aceita, o que levou ao esclarecimento do cálculo mediante o conceito de limite, no qual ele mesmo (Euler) negligenciou (Boyer, 1959, p. 246, traduzido pelos autores).

No que se refere ao conceito de continuidade de funções, Euler apresentou uma compreensão equivocada, uma vez que, para ele, uma função era contínua se fosse escrita em uma única forma algébrica (Jayakody, 2015; Jayakody; Zazkis, 2015). Ou seja, ele não relacionava a continuidade de uma função ao conceito de limite.

D'Alembert reconheceu a importância da nova análise e, na tentativa de tornar o conceito de limite – no qual a acreditava ser a base do cálculo diferencial – mais compreensível, apresentou a seguinte definição: "(...) uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável" (Baron; Bos, 1985, p. 28).

Em contrapartida, a ideologia geométrica de D'Alembert influenciou na falta de uma fraseologia clara em sua definição de limite (Messias, 2013). De qualquer maneira, seus estudos contribuíram para o estabelecimento de uma Nova Análise, em que o conceito de limite se constituiu como fundamental, trazendo à tona a formulação rigorosa do Cálculo.

4.6. Século XIX: o rigor matemático vem à tona

O Cálculo foi estabelecido no século XVII por Newton e Leibniz, entretanto, foi somente no século XIX, que esse campo de estudo foi definitivamente fundamentado, conforme o rigor matemático característico deste período. Destacam-se, nesse sentido, as contribuições de Bernhard Bolzano (1781 – 1848), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Karl Weirstrass (1815 – 1897), que foram de extrema importância para a fundamentação conceitual da Nova Análise.

No que concerne às contribuições de Bolzano, pode-se dizer que ele foi o primeiro a definir continuidade de função a partir do conceito de limite, definindo uma função $f(x)$ "como contínua em determinado intervalo se por qualquer valor de x nesse intervalo a diferença $f(x + \Delta x) - f(x)$ se torna e permanece menor que qualquer quantidade dada para um Δx suficientemente pequeno, sendo positivo ou negativo" (Boyer, 1959, p. 268, traduzido pelos autores). Verifica-se ainda que "Ele definiu a derivada de $F(x)$ para qualquer valor de x como a quantidade $F'(x)$, na qual a razão $\frac{F(x+ \Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ se aproxima indefinidamente, ou tanto quanto queiramos, a medida que Δx se aproxima de zero, sendo Δx positivo ou negativo (Boyer, 1959, p. 269, traduzido pelos autores).

Cauchy expôs em seus trabalhos – *Cours d'analyse de L'École Polytechnique, Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* e *Leçons sur le calcul différentiel* – uma incontestável contribuição para o Cálculo. Dentre suas manifestações acerca da fundamentação conceitual da Nova Análise, destaca-se sua definição de limite, livre das intuições geométricas, apresentada em seu *Cours d'analyse*: "quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

ordinariamente essas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de 'variável independente'" (Roque, 2018, p. 332).

Além da definição de limite, Cauchy apresentou a definição de um infinitesimal como sendo de ordem n a respeito de um infinitesimal x se $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right) = 0$ e $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right) = \pm\infty$, tal que $\varepsilon > 0$, e estabeleceu, ainda, a definição de derivada: "Seja a função $f(x)$. Atribui-se a variável x um incremento $\Delta x = i$; e forma-se a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. O limite dessa razão (se existir) quando i se aproxima de zero ele representou como $f'(x)$ e chamou de derivada de y em relação à x" (Boyer, 1959, p. 275, traduzido pelos autores).

As contribuições de Cauchy se estendem à noção de continuidade, a qual definiu a partir da ideia de limite, apresentando uma precisão matemática muito mais evidente que as definições expostas até então. Para ele, uma função $f(x)$ é contínua se, entre os limites, um incremento infinitamente pequeno i na variável x sempre produz um incremento infinitamente pequeno $f(x+i) - f(x)$ na função.

Cauchy tornou fundamental o conceito de limite de D'Alembert dando-lhe um caráter aritmético mais preciso, dispensando assim a geometria e infinitésimos ou velocidades: "quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite dos outros todos (Boyer, 1996, p. 355).

Com Cauchy o limite se dissocia da ideia de quantidades infinitamente pequenas, como também fornece os elementos necessários para que essas quantidades se separem do aspecto metafísico presente até então. No entanto, esta mesma noção de limite, encontra-se associado ainda a ideias intuitivas como valores sucessivos aproximar-se indefinidamente, e diferença tão pequena quanto se queira (Moraes, 2021).

Ainda sobre as contribuições de Cauchy para a Nova Análise, evidencia-se que, a partir de sua definição mais precisa de limite, ele construiu sua teoria sobre continuidade, séries infinitas, derivadas, diferenciais e integrais, sendo essa trajetória rumo à formalização do Cálculo também seguida por Weierstrass na segunda metade do século XIX.

Weierstrass apresentou notável clareza e rigor nas definições que apresentou. Sobre a noção de continuidade, ele definiu uma função contínua $f(x)$ em determinado intervalo se, para qualquer valor x_0 neste intervalo e para um número positivo arbitrariamente pequeno ε, for possível encontrar um intervalo próximo de x_0 tal que para todos os valores nesse intervalo a diferença $f(x) - f(x_0)$ for menor em valor absoluto que ε. Além disso, definiu limite, conforme a seguir: "O número L é o limite da função $f(x)$, tal que $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε, outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ, o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε (Boyer, 1959, p. 287, traduzido pelos autores).

Conforme Collete (1993), a formulação de Weierstrass precisa a expressão vaga "torna-se e permanece tão pequeno quanto qualquer quantidade dada" encontrada na definição de Cauchy, nestes termos, se for possível determinar uma quantidade δ tal que para cada valor de h, menor em valor absoluto do que δ, $f(x+h) - f(x)$ é menor do que uma quantidade ε tão pequena quanto se queira, então se dirá que tem feito corresponder uma variação infinitamente pequena da variável para uma variação infinitamente pequena da função.

Finalmente, diante das considerações de Bolzano e, principalmente, de Cauchy e Weierstrass, pode-se dizer que a Nova Análise atingiu seu rigor máximo, tal como os gregos jamais sonharam em alcançar.

5 SOBRE O USO DE ASPECTOS HISTÓRICOS PARA POTENCIALIZAR A COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

O texto que versa sobre o desenvolvimento histórico-conceitual do Cálculo, apresentado na seção anterior, trouxe consigo elementos que podem ser elucidados durante aulas de Cálculo, com vistas a viabilizar a compreensão de estudantes sobre uma variedade de conceitos.

Nessas condições e, partindo do entendimento de que no âmbito do processo de ensino e aprendizagem de matemática, é de suma importância que os estudantes sejam levados a fazer o uso do máximo de representações, interpretações, propriedades, dentre outros, enquanto refletem sobre determinada situação matemática, apresenta-se, no quadro 1, sugestões do uso de informações históricas para fomentar discussões que potencializem a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de função.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 1984-7505

Quadro 1 – Sugestões para uso da componente histórica em discussões sobre limite e continuidade de função

<table>
<tr><th>Aspecto histórico envolvido</th><th>Objetivo(s)</th><th>Discussão</th></tr>
<tr><td>Compreensão de Euler sobre continuidade de uma função</td><td>Verificar se os estudantes compreendem a definição de continuidade de função no ponto

Discutir sobre continuidade no intervalo

Explorar o conceito de continuidade de função (no ponto e no intervalo) a partir de representações algébricas e gráficas

Conscientizá-los de que o desenvolvimento histórico-conceitual do Cálculo também foi passível a erros, ou ainda, “fraturas epistemológicas”, e que estes são parte constituinte do processo evolutivo desse campo de conhecimento e podem (ou não) se fazer presentes no processo individual de aprendizado matemático</td><td>Apresentar uma função escrita em mais de uma sentença:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x < 2 \\ 2, \quad\quad x = 2 \\ 9 - x^2, x > 2 \end{cases}$$

Iniciar a discussão fazendo referência ao entendimento de Euler sobre continuidade de uma função (f é contínua se for escrita em uma única forma algébrica).

Solicitar que os alunos avaliem a continuidade de $f(x)$ em $x = 2$ e, em seguida, justifiquem sua resposta. Construir o gráfico da função e reforçar os aspectos analisados.

Verificar se as justificativas dos discentes estão pautadas na definição de continuidade de função no ponto. Nesse momento, pode-se colocá-los em uma situação de conflito, questionando-os se é válida, então, a compreensão de Euler (já que a função apresentada é escrita em mais de uma sentença e descontínua em $x = 2$).

Em seguida, apresentar uma outra função, como por exemplo:

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, x < 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}, \ 1 \leq x \leq 3 \\ x + 3, x > 3 \end{cases}$$

Solicitar que os estudantes avaliem se $g(x)$ é contínua em $x = 1$ e $x = 3$.

É válido, nesse momento, construir o gráfico da função. Em seguida, avaliar, também sob a perspectiva geométrica, os valores de $g(1)$ e $g(3)$, bem como $\lim_{x \to 1} g(x)$ e $\lim_{x \to 3} g(x)$.

Reiterar a definição de continuidade no ponto, sua relação com a existência do limite bilateral e com o domínio da função. Expandir a discussão para a definição de continuidade no intervalo. Em seguida, compará-las.

Nessas condições, questioná-los: Como vocês explicariam para Euler que a compreensão dele sobre continuidade de função estava equivocada?</td></tr>
<tr><td>Definições de limite ao longo dos séculos</td><td>Compreender como se deu a evolução das definições de limite ao longo dos séculos</td><td>Solicitar que eles analisem e comparem as diferentes definições de limite ao longo da história.

Questioná-los: O que mudou, considerando as definições de limite presente nos livros atuais?</td></tr>
</table>

	Comparar as definições com aquelas presentes nos livros didáticos atuais Discutir sobre os pontos de conformidade e/ou não conformidade das definições com o que tal conceito representa, tendo em vista o máximo de contextos possível.	Solicitar que eles escrevam uma definição pessoal de limite, isto é, fazendo uso de suas próprias palavras e, em seguida, explicá-la. Dessa forma, é possível averiguar se eles compreendem, de fato, a ideia matemática envolvida. Fazer uma discussão sobre os aspectos dinâmicos e estáticos que podem aparecer na tentativa de definir o conceito de limite.
Compreensão de Leibniz sobre a relação entre a (não)existência do limite e a (des)continuidade da função no ponto	Compreender como é estabelecida a relação entre os conceitos de limite e continuidade Conscientizá-los de que o desenvolvimento histórico-conceitual do Cálculo também foi passível a erros, ou ainda, "fraturas epistemológicas", e que estes são parte constituinte do processo evolutivo desse campo de conhecimento e podem (ou não) se fazer presentes no processo individual de aprendizado matemático	Apresentar, por meio de representações gráficas e algébricas: (i) uma situação em que a função é descontínua em x_0 e o limite não existe neste ponto; (ii) uma situação em que o limite existe no ponto e a função é descontínua neste ponto; (iii) uma situação em que a função é contínua no ponto e o limite não existe neste ponto (continuidade na extremidade do intervalo); Tendo em vista a discussão realizada, solicitar que eles expliquem o porquê que a compreensão de Leibniz sobre a relação entre limite e continuidade está equivocada.

Fonte: Elaborado pelos autores

Mediante o que foi apresentado no quadro, admite-se que a utilização de aspectos históricos relacionados ao conteúdo pode contribuir para que professores e alunos relacionem as estruturas conceituais envolvidas em múltiplos contextos, de modo a conectar conhecimento atual e antigo, fato que permite a comparação de estratégias de resolução de problemas e garante ao aluno a percepção do desenvolvimento conceitual e dos aspectos epistemológicos do objeto de conhecimento abordado, bem como as facilidades disponibilizadas pelos métodos estruturados de resolução modernos.

Dessa forma, a inclusão da perspectiva histórica no ensino pode contribuir para a formação do aluno, já que o mesmo pode experimentar determinado conhecimento matemático como atividade humana, desmitificando-o. Evidenciamos, ainda, que certo conhecimento acerca da história da matemática permite que o aluno avalie seu surgimento como um fruto da necessidade humana, reconhecendo-a como um corpo de conhecimento em constante evolução, fato que viabiliza o processo de interatividade na construção do conhecimento matemático escolar, bem como a exploração e releitura de fatos históricos, na tentativa de encontrar explicações para questionamentos levantados ao longo do processo de ensino-aprendizagem.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste ensaio, propôs-se ampliar a discussão acerca da articulação entre História da Matemática e Ensino de Matemática, tendo em vista a literatura da área e o contexto de desenvolvimento histórico-conceitual do Cálculo, mais especificamente, dos conceitos de limite e continuidade de uma função.

Desse modo, destacou-se alguns exemplos de como aspectos relativos a uma perspectiva histórica (apresentada na seção 4), podem balizar discussões que fomentem a compreensão sobre limite e continuidade, de modo a possibilitar um aprendizado amplo e adaptado à múltiplos contextos.

Finalmente, ressalta-se que o uso da componente histórica como suporte para ensinar matemática traz consigo algumas vantagens, dentre elas o aumento da motivação para aprender, a humanização da matemática, a aproximação multicultural para a construção do conhecimento, ajuda a explicar o papel da matemática na sociedade e, principalmente, contribui para que o estudante busque no passado soluções matemáticas para o presente, projetando seus resultados no futuro.

REFERÊNCIAS

BARON, M. E; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Vol 1-5. Trad. de José Raimundo Braga Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BELL, E. T. **Los grandes matemáticos - desde Zenon a Poincare:** su vida y sus obras. Buenos Aires: Losada, 1948.

BOYER, C. B. **The history of calculus and its conceptual development**. New York: Dover publications, 1959.

BOYER, C. B. **Cálculo**. Trad. de Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Editora Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967 ISSN 1984-7505

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRANDEMBERG, J.C.; MESSIAS, M.A.V.F. **Limite de uma função:** atividades para o ensino. Belém: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, 2019.

BRANDEMBERG, J. C. Revisitando a História da Matemática e enfatizando aspectos de sua formação (composição, consolidação) no campo da Educação Matemática. **Revista Cocar**, [S. l.], n. 14, 2022.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

BRANDEMBERG, J. C. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. In: **Investigações científicas envolvendo a história da matemática sob o olhar da pluralidade**. Curitiba, PR: CRV, 2021.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.** Tese de doutorado (Educação). USP, 1996.

BORGES, L. de C.; CAVALARI, M. F. A história da matemática em propostas didáticas para a formação de professores: um estudo em teses e dissertações brasileiras. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 22, p. 174–199, 2021. DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.22.174-199.

CHAQUIAM, M. **Ensaios temáticos:** história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. História e Matemática: um elo e quatro contextos. **Revista Cocar**, [S. l.], n. 14, 2022.

COLLETE, Jean-Paul. **Historia de las matemáticas**. Volumen 2. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1993.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

EDWARDS, C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 2009.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J**. History in mathematics education**. The ICMI Study, 2000.

FAUVEL, J. A utilização da história em educação matemática. *In:* VIEIRA, Ana; VELOSO, Eduardo; LAGARTO, Maria João (Orgs.) História da Matemática - Cadernos do GTHEM. **Relevância da história no ensino da matemática**. Associação de Professores de Matemática. nº 1, nov., 1997. pp. 15-20.

JAYAKODY, G. **University first year students' discourse on continuous functions:** A commoginitive interpretation. Tese (Doutorado em filosofia) – Programa de Educação Matemática, Simon Fraser University, 2015.

JAYAKODY,G.; ZAZKIS, R. Continuous problem of function continuity. **For the Learning of Mathematics**, New Brunswick (Canadá), v. 35, p. 8 – 14, março, 2015.

MENDES, I. A. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **Revista Cocar**, [S. l.], n. 14, 2022a.

MENDES, I. A. **Usos da história no ensino de matemática: reflexões históricas e experiências.** São Paulo: Livraria da Física, 2022b.

MENDES, I. A. (Org). **A história como um agente de cognição na educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino:** entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Coleção História da matemática para Professores).

MENDES, I. A.; MORAES, M. S. F de. Obstáculos epistemológicos sobre el concepto de límite de funciones en manuales de historia de matemáticas. **Revista Paradigma**, Vol. XLI, n° Extra 1; abril de 2020, pp. 240-265. DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p240-265.id840

MESSIAS, M. A. V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MORAES, M. S. F. de. **Processos de superação dos obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite de função:** potencialidades conceituais e didáticas para a formação de professores de matemática. Tese (Doutorado em Educação Ciências e Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, 2021.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, [S. l.], v. 13, n. 25, p. 342–372, 2019.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2018.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

COMO CITAR - ABNT
MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; BRANDEMBERG, João Cláudio; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de. Potencialidades de uma abordagem histórica do cálculo para o ensino dos conceitos de limite e continuidade de uma função. **Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 19, n. 33, *e*23042, jan./dez., 2023. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967

COMO CITAR - APA
Messias, M. A. de V. F., Brandemberg, J. C., Moraes, M. S. F. de. (2023). Potencialidades de uma abordagem histórica do cálculo para o ensino dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências*, *19*(33), *e*23042. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n32.3967

HISTÓRICO
Submetido: 18 de setembro de 2023.
Aprovado: 23 de novembro de 2023.
Publicado: 30 de dezembro de 2023.