Areté
Revista Amazônica de Ensino de Ciências

O FORMALISMO E A AXIOMATIZAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DA ÁLGEBRA LINEAR

FORMALISM AND AXIOMATIZATION IN THE HISTORICAL AND EPISTEMOLOGICAL DEVELOPMENT OF LINEAR ALGEBRA

FORMALISMO Y AXIOMATIZACIÓN EN EL DESARROLLO HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DEL ÁLGEBRA LINEAL

Renan Marcelo da Costa Dias[*]
João Cláudio Brandemberg[**]
Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias[***]

RESUMO

A pesquisa ora apresentada teve por objetivo responder à seguinte questão: De que maneira o formalismo e a axiomatização surgem nos processos de unificação e generalização de conceitos subjacentes à Álgebra Linear, em seu processo de constituição histórica e epistemológica? Para tal, realizamos uma investigação bibligráfica nos trabalhos de Dorier (1995,2000) e Moore (1995), os quais discutem o desenvolvimento histórico e epistemológico da Álgebra Linear enquanto zona de inquérito, bem como os fundamentos matemáticos desse processo. A partir da leitura e de exercícios reflexivos sobre esses trabalhos, foi possível concluir que formalismo e axiomatização surgem como linguagens técnicas complementares e necessárias aos processos de unificação e generalização de problemas de linearidade, as quais permitiram a constituição da Álgebra Linear como campo que estuda os módulos sobre um anel e seus homomorfismos, que conhecemos por transformações lineares, os quais são representados por matrizes quando o módulo tem uma base finita.

Palavras-chave: Educação Matemática. Álgebra Linear. Formalismo. Axiomatização.

ABSTRACT

The research presented here aimed to answer the following question: How do formalism and axiomatization emerge in the processes of unification and generalization of concepts underlying Linear Algebra, in its process of historical and epistemological constitution? To this end, we conducted a bibliographical investigation in the works of Dorier (1995, 2000) and Moore (1995), which discuss the historical and epistemological development of Linear Algebra as an area of inquiry, as well as the mathematical foundations of this process. From the reading and reflective exercises on these works, it was possible to conclude that formalism and axiomatization emerge as complementary and necessary technical languages for the processes of unification and generalization of linearity problems, which

[*] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas. Professor da Universidade da Amazônia (UNAMA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: renanmarcelo1998@gmail.com. ORCiD: https://orcid.org/0000-0002-4305-9948
[**] Doutor em Educação (UFRN). Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará. Brasil. E-mail: brand@ufpa.br. ORCiD: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550
[***] Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA). Professora da Universidade do Estado do Pará (UEPA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: alice.messias@gmail.com. ORCiD: https://orcid.org/0000-0003-2853-1965

allowed the constitution of Linear Algebra as a field that studies modules over a ring and their homomorphisms, which we know as linear transformations, which are represented by matrices when the module has a finite base.

Keywords: Mathematical Education. Linear Algebra. Formalism. Axiomatization.

RESUMEN

La investigación aquí presentada tuvo como objetivo responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo surgen el formalismo y la axiomatización en los procesos de unificación y generalización de conceptos que subyacen al Álgebra Lineal, en su proceso de constitución histórica y epistemológica? Para ello, realizamos una investigación bibliográfica en los trabajos de Dorier (1995, 2000) y Moore (1995), que discuten el desarrollo histórico y epistemológico del Álgebra Lineal como zona de investigación, así como los fundamentos matemáticos de este proceso. A partir de lecturas y ejercicios de reflexión sobre estos trabajos, fue posible concluir que el formalismo y la axiomatización emergen como lenguajes técnicos complementarios y necesarios para los procesos de unificación y generalización de problemas de linealidad, lo que permitió la constitución del Álgebra Lineal como un campo de estudio. los módulos de un anillo y sus homomorfismos, que conocemos como transformaciones lineales, que se representan mediante matrices cuando el módulo tiene base finita.

Palabras clave: Educación Matemática. Álgebra lineal. Formalismo. Axiomatización.

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear, campo que estuda os espaços vetoriais e as suas trasnformações lineares, consiste em uma das primeiras disciplinas nas quais os alunos do curso de licenciatura em Matemática têm contato com o rigor e o formalismo necessário no estudo dos objetos matemáticos, isto é, na qual se faz indispensável o uso de explicações lógicas para concepções conceituais adotadas e procedimentos operacionais executados (DIAS, 2022).

No entanto, segundo Dorier *et. al.* (1994), esse encontro não ocorre de maneira muito tranquila, uma vez que os alunos têm a sensação de estar 'pousando' em um planeta totalmente diferente e não conseguem encontrar caminhos nesse novo mundo. Dentre as principais críticas proferidas por esses novos habitantes, encontram-se o formalismo e a axiomatição com as quais os conceitos da Álgebra Linear são tratados.

Os estudos brasileiros também têm corroborado com a ideia da linguagem formal e axiomática como obstáculos de aprendizagem. Em tais estudos, o formalismo e a axiomatização impossibilitam o aluno de visualizar os vetores em diferentes contextos, tais como geométrico ou computacinal, ou ainda em elementos diferentes das tradicionais n-uplas, a saber, matrizes, funcões, polinômios, etc. (GRANDE, 2006; ANDRADE, 2006; SOUZA, 2016).

No entanto, ainda que haja uma caracterização negativa do formalismo e da axiomatização, Dorier (1998) defende que estes, na verdade, consistem em elementos-chave da disciplina, uma vez que possibilitam a compreensão do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, o qual está intimamente ligado à sua constitução histórica e epistemológica enquanto campo de investigação e, posteriormente, campo disciplinar.

Frente a esse cenário, colocamo-nos diante da seguinte questão: De que maneira o formalismo e a axiomatização surgem nos processos de unificação e generalização de conceitos subjacentes à Álgebra Linear, em seu processo de constituição histórica e epistemológica?

Para respondê-la, desenvolvemos a pesquisa bibliográfica apresentada neste trabalho, cujo objetivo foi investigar como o formalismo e a axiomatização se fizeram presentes no âmbito dos processos de unificação e generalização inerentes ao desenvolvimento histórico-epistemológico de conceitos subjacentes à Álgebra Linear.

Maiores esclarecimentos sobre a temática objeto de estudo deste trabalho são apresentados nas seções subsequentes.

2 OS PRIMEIROS CONCEITOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Fundamentados na proposta de apresentar o desenvolvimento histórico de conceitos que compõem a Álgebra Linear, firmada neste trabalho, fez-se necessário a adoção de um marco inicial a partir do qual esse processo seria começado. A adoção de um ponto de partida emergiu como basilar nesse contexto haja vista que, ainda que a disciplina em questão seja relativamente nova no meio acadêmico, os conceitos que a compõem são manuseados desde o tempo de civilizações antigas, tais como babilônios, egípcios e chineses.

O marco inicial adotado no presente trabalho fora o estudo analítico dos sistemas de equações lineares. Para Dorier (1995), apesar desses sistemas terem sido objetos de investigação em civilizações antigas, tais como as citadas anteriormente, um olhar mais intuitivo sobre estes, os sistemas de equação, no século XVIII, constituiu o contexto no qual os primeiros conceitos da Álgebra Linear foram desenvolvidos.

Os primeiros passos no decurso de uma análise mais sistemática acerca das equações lineares foram dados em 1750 pelos matemáticos Gabriel Cramer (1704 – 1752) em sua *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, na qual foi apresentada uma estrutura que preconiza os determinantes, e por Leonhard Euler (1705 – 1783) em seu *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*, no qual foi discutido o paradoxo de Cramer em relação às curvas algébricas (Dorier, 1995).

No início do século XVIII, duas proposições eram consideradas verdadeiras, embora parcialmente comprovadas, a saber:

> 1) Duas curvas algébricas distintas de ordem m e n têm $m \times n$ pontos em comum. Era sabido que alguns poderiam ser múltiplos, complexos ou infinitos, mas os matemáticos também conheciam exemplos em que esses pontos eram todos simples e reais.
> 2) $\frac{n \times (n+3)}{2}$ pontos são necessários e suficientes para determinar uma curva de ordem n (DORIER, 1995, p. 228, tradução nossa).

O paradoxo consiste na segunda proposição, na qual para n maior que dois ocorre que $\frac{n \times (n+3)}{2} \leq n^2$, ou seja, duas curvas algébricas podem obter mais pontos do que o necessário para determinar cada uma. Esse paradoxo havia sido identificado inicialmente por Colin MacLaurin em 1720, porém Cramer reformulou-o em seu tratado no ano de 1750.

No mesmo ano, Euler percebeu que nem sempre isso era verdade, e para demonstrá-lo realizou um estudo analítico e intuitivo de sistemas de equações em que o número de incógnitas era igual ao número de equações e chamou atenção para um ‘incidente’.

Euler tomou inicialmente um sistema contendo duas equações

$$3x - 2y = 5 \qquad \text{e} \qquad 4y = 6x - 10$$

e, por meio do processo de eliminação e substituição, concluiu que era impossível determinar as duas incógnitas, pois ao tentar eliminar x, y desaparecia e uma equação idêntica surgia.

Euler explicou que o motivo do aparecimento desse ‘incidente’ seria o fato de que a primeira equação nada mais era do que o dobro da segunda e assim não se diferenciariam em nada (DORIER, 1995).

Como o fato de uma equação ser o dobro da outra não era suficiente para evidenciar tal ‘incidente’, Euler teve que resolver o sistema por eliminação e substituição para convencer outros matemáticos. Ele também apresentou exemplos para três e quatro equações, nos quais havia incógnitas que ficariam indeterminadas devido às relações lineares entre essas equações (Dorier, 1995). Após a resolução e discussão dos mais diversos exemplos, Euler concluiu que:

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3944 1984-7505

> Quando sustentamos que, para determinar n quantidades desconhecidas, é suficiente ter n equações que expressam sua relação mútua, devemos adicionar a restrição de que todas as equações são diferentes umas das outras, ou de que nenhuma das equações está contida nas outras" (EULER, 1750 *apud* DORIER, 1995, p. 230, tradução nossa)

Assentados em uma visão moderna da Álgebra Linear, visualizaríamos o termo 'uma equação contida nas outras', empregado por Euler, como o atual conceito de dependência e independência linear, entretanto, tais conceitos referem-se a uma relação entre vetores emergentes de diferentes naturezas, enquanto que a noção trabalhada por Euler está imersa em um contexto particular de equações. Desse modo, Dorier (1995; 2000) defende que Euler introduziu a noção de *Dependência Inclusiva*.

Segundo Dorier (1995; 2000), ambas as dependências se equivalem quando trabalhadas no contexto das equações, porém a de Euler é mais local e a noção de dependência e independência linear correga consigo um caráter unificador e generalizante, uma vez que unifica e generaliza essa relação de dependência para os demais objetos matemáticos, tais como n-uplas, matrizes, funções, polinômios etc.

Ainda no contexto dos sistemas de equações apresentados por Euler, no caso em que o sistema possuía quatro equações e quatro incógnitas evocou-se a noção embrionária do que seria conhecido futuramente como posto, bem como no qual também foram desenvolvidas considerações semelhantes em relação ao paradoxo de Cramer:

> Quando duas linhas de quarta ordem se encontram em 16 pontos, pois 14 pontos, quando conduzem a equações diferentes, são suficientes para determinar uma linha desta ordem, esses 16 pontos serão sempre tais que três ou mais equações já estão compreendidas nas demais. Desta forma, esses 16 pontos não determinam mais do que se houvesse 13 ou 12 ou até menos pontos e para determinar a curva inteiramente, deve-se adicionar a esses 16 pontos um ou dois outros (EULER, 1750 *apud* DORIER, 1995, p. 230, tradução nossa).

Dorier (2000) pontua que, embora a análise intuitiva de Euler tenha sido profícua para o surgimento de noções matemáticas que preconizam os conceitos de dependência e posto, ela não teve uma grande repercussão devido a rápida aceitação e utilização dos determinantes de Cramer para a resolução de sistemas de equações, os quais exigiam mais técnica do que intuição.

De fato, Wussing (1998) assegura que apesar de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) ter sinalizado a manipulação de expressões semelhantes aos determinantes em uma carta enviada à L'Hospital (1661 – 1704) no ano de 1693, foi a partir de Cramer que os determinantes se converteram em um patrimônio geral dos matemáticos utilizado em álgebra, geometria a análise.

Segundo Dorier (1995; 2000), por quase um século as questões relacionadas aos sistemas indeterminados e impossíveis de equações lineares foram negligenciadas por matemáticos, e como consequência os conceitos de dependência e posto, que emergem dessas questões, passaram por um longo processo de obscuridade.

Por volta de 1840 a 1879 o conceito de posto se constituiu dentro da teoria dos determinantes, contudo, para que esse conceito pudesse ser construído, os matemáticos tiveram que adotar uma definição unificada de dependência para equações e n-uplas, assim como, anteciparam o conceito de dualidade (DORIER, 1995; 2000)

Com relação à definição unificada de dependência para equações e n-uplas, George Ferdinand Frobenius (1849 – 1917 foi quem primeiro a apresentou em seu *Über das Pfaffsche Problem*, publicado em 1875:

> Várias soluções particulares $A_1^{(x)}, \dots, A_n^{(x)}, (x = 1, \dots, k)$ deve, portanto, significar independente ou diferente se $c_1 A_\alpha^{(x)} + \cdots + c_k A_\alpha^{(x)}$ não pode ser zero para $\alpha = 1, \dots, n$ sem que todo $c_1, \dots, c_k$ seja igual a zero, ou seja, se a forma k linear para $A_1^{(x)} u_1, \dots, A_n^{(x)} u_n$ são independentes (FROBENIUS, 1875, p. 223 *apud* DORIER, 2000, p. 12, tradução nossa)

Frobenius, ao considerar equações e n-uplas como objetos de mesma natureza em relação a linearidade, possibilitou uma grande contribuição em direção ao conceito moderno de vetor, além do que, obteve elementos que lhe permitisse apresentar uma definição de posto em um caráter mais generalizado, como ordem máxima de um menor não zero.

Segundo Dorier (2000), os matemáticos da época compreenderam rapidamente a importância do conceito de posto, uma vez que não apenas evitou o uso de circunlocuções longas, mas também possibilitou soluções mais fáceis e claras para muitos problemas no contexto dos determinantes. Frobenius também mostrou a eficiência de seu novo conceito em seus escritos sobre formas quadráticas e equações diferenciais.

O contexto histórico de criação dos conceitos de dependência, posto e dualidade, apresentados neste tópico, nos permite refletir acerca da praticidade advinda da linguagem unificadora em Álgebra Linear. A simplicidade na resolução de problemas lineares, promovida pelo conceito de posto – em um caráter mais generalizado – se tornou realidade a partir da adoção de uma linguagem unificadora (definição) das relações de dependência, tanto para equações quanto para n-uplas, alcançadas por Frobenius por meio de uma linguagem mais formal.

Além de ter sido subsidiado pela teoria dos determinantes, o desenvolvimento de grande parte das ferramentas, desde a álgebra matricial até o estudo das mudanças de coordenadas, foi possibilitado por meio da aplicação de métodos analíticos na geometria. Assim, a Geometria também se constitui em um campo no qual a Álgebra Linear também se funda. Discorremos com mais detalhes sobre esses aspectos na próxima seção.

3 O CÁLCULO GEOMÉTRICO E A EMERGÊNCIA DE NOVAS ÁLGEBRAS

A utilização de artifícios algébricos na resolução de problemas de geometria destacou-se no início do século XVII a partir dos trabalhos independentes de Pierre de Fermat (1607 – 1665) e René Descartes (1596 – 1650). Dado o seu grande poder de simplificação e unificação na resolução de problemas de cunho geométrico, o método analítico foi adotado por muitos matemáticos e, como consequência, a linearidade tornou-se um ponto de partida e uma questão central em diversos problemas desse período (DORIER, 2000).

Entretanto, apesar de sua notoriedade entre os matemáticos, o método analítico foi também alvo de intensas críticas pelos acadêmicos científicos, principalmente com relação à arbitrariedade na escolha das coordenadas durante as demonstrações.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) foi um dos principais críticos do método analítico de Descartes. Em uma carta enviada à Christian Huyghens (1629 – 1695) em 1679, mas publicada apenas em 1833, Leibniz externalizou seu descontentamento com o tratamento algébrico dado aos problemas de linearidades à luz do método analítico e propôs a criação de um cálculo geométrico mais intrínseco, o qual chamou de 'Geometria de situação', baseada na relação de congruência entre n-uplas de pontos.

Segundo Dorier (1995), apesar de Leibniz não ter logrado êxito na criação de um cálculo geométrico intrínseco – haja vista que a relação de congruência não leva em conta as diferentes direções no espaço e nem a orientação, fato que impossibilitou a sua expansão – ele suscitou em outros matemáticos o desejo de se chegar à essa 'Geometria de situação'.

Nesse contexto, um importante passo rumo à construção de um cálculo geométrico, tal como Leibniz propunha, foi dado a partir das tentativas de representação geométrica das quantidades imaginárias. Embora essa necessidade estivesse relacionada a legitimação desses novos números, o sistema que os contém – apesar de bidimensional – pode ser classificado como um sistema vetorial e, assim, contribuiu para o desenvolvimento das primeiras ideias vetoriais (DORIER, 2000).

Jonh Wallis (1616 – 1703) foi um dos primeiros matemáticos a dar uma visão geométrica das raízes quadradas dos números negativos, mas o modelo proposto por ele não obteve êxito quanto à representação da multiplicação desses números. Posteriormente cinco matemáticos, de maneira independente umas das outras, possibilitaram a representação dos números complexos, a saber, Caspar Wessel (1745 – 1818) em 1799; Adrien Quentin Buée (1745 – 1825) em 1805; Jean Robert Argand (1768 – 1822) em 1806; C. V. Mourey (1791 – 1830) em 1828 e John Warren (1796 – 1852) em 1828 (BARONI, 2009).

Em seu trabalho de 1799, Wessel definiu adição de linhas retas, bem como também estabeleceu a soma de três ou mais retas não coplanares e evidenciou a comutatividade dessa operação. Após Wessel, Argand e Buée, simultaneamente e separadamente, publicaram em 1806 tratamentos geométricos semelhantes para os números complexos, o que também ocorreu com Morey e Warren em 1828. Há uma possibilidade de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) ter descoberto a representação dos complexos ao mesmo tempo que Wessel (BARONI, 2009).

Embora os supracitados matemáticos tenham possibilitado, de maneira independente, a representação geométrica dos números complexos, foi com Gauss e Cauchy, por volta de 1831 e 1849, respectivamente, que as representações dos complexos se tornaram amplamente conhecidas e aceitas entre os matemáticos. Porém, ainda que o estudo das quantidades imaginárias tivesse tido grandes avanços, os matemáticos não conseguiam expandir suas ideias para o espaço tridimensional e, assim, criar operações em triplas de números reais (DORIER, 2000).

Alicerçados na busca por uma análise geométrica intrínseca, bem como na tentativa de expandir a representação dos números complexos, em sua legitimação, para a terceira dimensão, August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) e Giusto Bellavitis (1803 – 1880) desenvolveram dois diferentes sistemas de análise geométrica, válidos para dimensão dois e três, que se tornaram base para a Geometria Vetorial (DORIER, 2000).

No ano de 1827, Möbius desenvolveu pela primeira vez a noção matemática de segmento orientado, além do que definiu a adição de segmentos colineares. Em 1887, Möbius também definiu a adição de segmentos não colineares, a multiplicação de um segmento por um escalar e ainda dois tipos de produtos de segmentos orientados inspirados nos trabalhos de Hermann Grassmann (1809 – 1877).

Segundo Dorier (1995), apesar da teoria de Möbius figurar uma álgebra de pontos, seu propósito era o de exibir um método para resolver problemas geométricos e físicos – o que de fato realizou por meio de diversas aplicações convincentes – e não de apresentar uma estrutura algébrica detalhadamente. Assim, embora ele tenha apontado alguns aspectos fundamentais da geometria vetorial, bem como de seu trabalho estar embasado numa percepção intuitiva de espaço, isso não foi o suficiente para oferecer a possibilidade de extensão para o conceito mais geral de Espaço Vetorial.

Em acordo com Dorier (2000), Bellavitis é considerado o primeiro a ter definido algo muito próximo ao conceito de vetor geométrico como uma classe de pares equipolente de pontos, denominado por ele de equipolência, no ano de 1835. À Bellavites também é creditado o mérito da primeira definição para a adição de vetores no espaço, bem como, a definição da multiplicação de segmentos de linha dirigidos por um número real e ainda o conceito de multiplicação de equipolências.

> (2º) Duas linhas retas são chamadas equipolentes se forem iguais, paralelas e dirigidas no mesmo sentido.
> (3º) Se duas ou mais linhas retas estão relacionadas de tal forma que a segunda extremidade de cada linha coincide com a primeira extremidade da seguinte, então a linha que juntamente com essas linhas forma um polígono (regular ou irregular), e que é desenhada a partir da primeira extremidade da última linha é chamada de soma equipolente (DORIER, 1995, p. 236, tradução nossa).

Embora o cálculo de Bellavitis não oferecesse mais possibilidades que os números complexos e que tivesse sido baseado na obra de Buée, ele se recusava a aceitar os imaginários como entidades legítimas da Matemática e, por isso, propunha a substituição de grandezas imaginárias por entidades geométricas reais. Tal fato estabeleceu uma perspectiva bem

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3944 1984-7505

diferente no que se refere ao desenvolvimento de um cálculo geométrico.

Além disso, a preocupação desse matemático era a estrutura algébrica das equipolências, apresentadas por ele como um novo tipo de álgebra com a maioria das propriedades da álgebra usual, e ainda, com exceção da multiplicação, elas eram tridimensionais. Bellavitis mostrou a eficiência de seu método por meio de aplicações na geometria e na física (DORIER, 2000).

Conforme vimos discutindo, a representação geométrica dos números complexos constituiu-se em um contexto no qual o desenvolvimento de uma análise geométrica intrínseca pôde ser executado. Contudo, ainda que Möbius e Bellavitis tenham conseguido expandir a representação de tais números para o espaço tridimensional, o produto entre complexos continuava a ser um problema em termos geométricos.

Um dos principais obstáculos relacionado à representação geométrica do produto entre complexos estava relacionado com o paradigma algébrico desse período. Até o século XIX o único modelo para álgebra tinha sido dado pela aritmética dos números reais e, portanto, caso um novo tipo de álgebra surgisse, ela deveria aderir às (implícitas) propriedades comutativas de adição e multiplicação, o que em termos atuais chamaríamos de uma estrutura de corpo comutativo (DORIER, 2000).

A solução para esse problema foi dada por Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865). Após suas frustradas tentativas de resolver o problema algebricamente, Hamilton concentrou sua análise na natureza geométrica da multiplicação no plano, representada por vetores, e assim, notou que esse tipo de multiplicação, além de se basear no produto dos comprimentos de cada vetor e no ângulo formado entre eles, também deveria levar em consideração a direção da rotação (plano) nos casos em que esse produto se assentava no espaço tridimensional (DORIER, 2000).

Nesse sentido, Hamilton percebeu que era mais conveniente o uso de quádruplas ou invés de ternas para que o cálculo geométrico tridimensional fosse possível, além disso, ele percebeu que o produto entre as quádruplas não poderia gozar da comutatividade, uma vez que as rotações não comutam.

Assim, tendo em vista seus resultados, em 1844 Hamilton publicou os primeiros elementos do que chamou de 'Teoria dos Quatérnios', os quais foram definidos como sendo "números algébricos que permitem uma representação geométrica no espaço em que a multiplicação representa, ao mesmo tempo, um produto escalar e um produto vetorial" (Dorier, 1995, p. 237, tradução nossa). É também nas publicações de Hamilton que vemos pela primeira vez os termos vetor e escalar.

Segundo Dorier (1995), embora os quatérnios tivessem uma grande repercussão no meio matemático – a quebra da intocável lei da comutatividade para a multiplicação estimulou o estudo de novas álgebras – a teoria de Hamilton contribuiu mais para o desenvolvimento de uma análise vetorial do que propriamente para o surgimento da teoria dos Espaços Vetoriais, haja vista que a concepção dos matemáticos quanto à possibilidade de um espaço para além da terceira dimensão ainda era muito limitada, devido a legitimidade perante a realidade física.

Contudo, ainda que não tenha havido influências diretas, os quatérnios de Hamilton, aliados à descoberta das geometrias não euclidianas e ao desenvolvimento das geometrias projetiva e algébrica, foram fundamentais para a construção de uma geometria n-dimensional no século XIX. Em tal geometria, baseada nos métodos analíticos e na teoria dos determinantes e matrizes, encontram-se os gérmens das primeiras noções de uma teoria de linearidade, e assim, da Álgebra Linear (DORIER, 1995).

Ainda balizado pela busca de um cálculo liberto de coordenadas, tal como Leibniz havia idealizado, a criação de uma geometria n-dimensional tornou-se realidade com Hermann Grassmann, em seu *Die Lineale Ausdehnungslehre*, publicado no ano de 1844. Nessa obra fora apresentado um sistema totalmente novo, alicerçado em bases filosóficas e geométricas do espaço, na qual são reunidas grandezas mais gerais que não cumpriam necessariamente a propriedade comutativa, o que corresponde, em termos modernos, a uma apresentação axiomática do Espaço Vetorial n-dimensional (BARONI, 2009).

Além disso, para Táboas (2010), a consolidação de uma linguagem que pudesse relacionar a geometria sintética e a análise geométrica era também objetivo de Grassmann, que o fez por meio de uma abordagem de vetores, os quais ele concebia como deslocamento ou extensões, através de operações de soma e produto entre eles. A representação geométrica de extensão adotada por Grassmann era um segmento orientado de reta, da qual ele abstraiu o conceito de extensão linear.

Nessa perspectiva, apesar de Grassmann ter trabalhado com suas ideias no contexto geométrico, ele não se limitou em apresentar suas definições em função de um espaço tridimensional. A singularidade da obra de Grassmann encontra-se no fato de nela conter bases pertinentes para uma teoria unificada da linearidade, haja vista que o autor introduziu com precisão e em um contexto generalizado conceitos elementares da Álgebra Linear.

O processo de generalização de Grassmann pode ser melhor observado quando este discute a relação da ordem do sistema com os conceitos de geração e dependência. Para generalizar a sua afirmartiva de que um sistema de n-ésima ordem era gerado por n métodos fundamentais e independentes de evolução, Grassmann usou o contraste entre os aspectos formais e reais da adição de deslocamento (o que equivale aos nossos vetores) e concluiu que "[O] sistema de ordem m é gerável por quaisquer m métodos de evolução pertencentes a ele que sejam mutuamente independentes" (DORIER, 1995, p. 245, tradução nossa).

Para Dorier (1995), essa afirmação de Grassmann fornece uma noção equivalente ao conceito moderno de base e dá ao valor m um significado geral próximo ao que conhecemos por dimensão.

Em 1862, após intensas críticas sobre sua obra, Grassmann lançou uma reformulação de sua *Ausdehnungslehre*. Em sua nova edição, o matemático em questão retirou a base filosófica que a alicerçava e ainda modificou o modo como os resultados matemáticos eram apresentados, os quais passaram a ser dados a priori e definidos por meio de operações, conforme era costume da época, além do que, também apresentou conceitos inéditos aos quais havia chegado durante a reestruturação de sua obra (DORIER, 1995).

Um fato interessante, observado em Dorier (1995; 2000), consiste quando Grassmann definiu um sistema de m unidades, ou seja, um sistema de m magnitudes lineares independentes, como o sistema de todas as combinações lineares das unidades, pois ele define adição, subtração, multiplicação e divisão por um número, e ainda institui uma lista de propriedades fundamentais que essas operações deveriam satisfazer, e das quais todas as leis algébricas dessas operações decorreriam.

> 8. Para magnitudes extensas a, b, c. as fórmulas fundamentais se aplicam:
> 1) $a + b = b + a$
> 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$
> 3) $a + b - b = a$
> 4) $a - b + b = a$
> Prova.
> [...]
> 12. As fórmulas fundamentais se aplicam à multiplicação e divisão de magnitudes extensas (a, b) por números (α, β)
> 1) $\alpha\beta = \beta\alpha$

2) $(\alpha\beta)\gamma = \gamma(\beta\alpha)$
3) $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$
4) $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$
5) $a\,.\,1 = a$
6) $\alpha\beta = 0$
Então, e somente se $a = 0$ ou $\beta = 0$
7) $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\,.\,\frac{1}{\beta}$, se $\beta \neq 0$ (GRASSMANN, 1862 *apud* DORIER, 2000, p. 26, tradução nossa)

Segundo Dorier (1995), dentre todas as propriedades apresentadas por Grassmann, as do parágrafo oito e doze chamam atenção por se assemelhar bastante aos axiomas da estrutura moderna do Espaços Vetorial, exceto pela (1) e (7) referente a multiplicação que são meras convenções; a (6) que é uma propriedade redundante; e o uso ambíguo da subtração, que tornava o conceito de zero e oposto um tanto obscuro.

Embora a *Die Lineale Ausdehnungslehre* de Grassmann tenha sido ignorada pelos matemáticos, tanto em 1844 quanto em 1862, ela figurou a primeira teoria a conter explicitamente uma geometria n-dimensional, na qual conceitos de Álgebra Linear, tais como Dependência e Independência Linear, Geradores, Base e Dimensão, foram definidos em sua generalidade.

Além disso, o referido trabalho serviu de suporte para as primeiras noções axiomáticas de Espaços Vetoriais e problemas lineares de dimensão finita apresentados no final da década de 1880, mas que só vieram a se consolidar por volta de 1920, período no qual os resultados apresentados por Grassmann tiveram de ser redescobertos por outros matemáticos. Na próxima seção, discute-se melhor tais questões.

4 AS ABORDAGENS AXIOMÁTICAS PARA OS ESPAÇOS VETORIAIS

Conforme colocado na seção anterior, o trabalho de Grassmann constituiu o primeiro tratado no qual os conceitos subjacentes à Álgebra Linear foram definidos em sua unificação e generalidade e que, apesar de não ter tido a devida atenção dos matemáticos da época, forneceu bases para as primeiras noções axiomáticas em Álgebra Linear.

Giuseppe Peano (1858 – 1932) foi um dos primeiros a chamar atenção ao trabalho de Grassmann no decurso de seus estudos envolvendo vetores. Peano trabalhou com as noções de vetores de três maneiras distintas ao longo de sua vida: A primeira, em 1887, na forma de n-uplas; a segunda, em 1888, na forma de um segmento de linha orientado (diferença B – A de dois pontos

A e B) e a terceira, também em 1888, foi o que ele chamou de sistemas lineares, os quais eram essencialmente o que consideramos como Espaços Vetoriais sobre o conjunto dos números reais (MOORE, 1995).

A terceira abordagem esteve contida em seu livro *Calcolo geométrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*. Esta obra, segundo Peano, tinha por objetivo discutir o Cálculo Geométrico idealizado por Leibniz e desenvolvido por Möbius, Bellavitis, Hamilton e Grassmann, deixando mais claro e acessível aos matemáticos da época a abordagem deste último, a partir de uma releitura do *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Peano apenas introduziu ideias próprias nos dois últimos capítulos do livro (MOORE, 1995).

O capítulo final *transformações de sistemas lineares* é o de maior interesse, pois é neste capítulo que Peano apresentou a definição do que ele nomeou por Sistema Linear, o que em sua essência figura como um Espaço Vetorial sobre os números reais. Nesse contexto, '<' significa implicação.

> Existem sistemas de objetos para os quais as seguintes definições são dadas:
> 1) É definida uma equivalência entre dois objetos do sistema, ou seja, uma proposição, denotada por $a = b$
> 2) É definida uma soma de dois objetos a e b. Ou seja, é definido um objeto, denotado por $a + b$, que também pertence ao sistema dado e satisfaz as condições:]
> $(a = b) < (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c$
> 3) Supondo que a seja um objeto do sistema e m um número inteiro positivo, entendemos por ma a soma de m objetos iguais a a. É fácil ver que se a, b... são objetos do sistema e m, n ... são inteiros positivos, então
> $(a = b) < (ma = mb); m(a + b) = ma + mb; (m + n) = ma + na; m(na) = (mn)a; 1a = a.$
> Assumimos que um significado é atribuído a ma para qualquer número real m de forma que as equações anteriores ainda sejam satisfeitas. O objeto ma é o produto do número (real) m pelo objeto a.
> 4) Finalmente, assumimos que existe um objeto do sistema, que nós... denotamos por 0, de modo que, para qualquer objeto a, o produto do número 0 pelo objeto a é sempre o objeto 0, ou seja,
> $$0a = 1$$
> Se deixarmos $a - b$ significar $a + (-1)b$, segue-se que:
> $$a - a = 0, a + 0 = a$$
> DEF. Sistemas de objetos para os quais as definições (1) – (4) são introduzidas de forma a satisfazer as condições dadas são chamados de sistemas lineares (PEANO, 1888 *apud* MOORE, 1995, p. 268, tradução nossa).

Para Baroni (2009), embora os axiomas de Peano sejam bastante semelhantes às propriedades fundamentais apresentadas por Grassmann, sua abordagem axiomática se tornou mais precisa com relação às propriedades das operações para descrever a estrutura. Além do

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3944 1984-7505

que, Peano aperfeiçoou a formulação ao retirar algumas redundâncias que apareciam nas propriedades fundamentais de Grassmann e ainda deu maior clareza aos conceitos de zero e de elemento oposto.

Peano também apresentou exemplos dos seus sistemas, tais como os números reais, os números complexos, formações das primeiras espécies, vetores no plano e no espaço e formação de espécies superiores. As funções polinomiais de uma variável real foi o exemplo mais inovador dado por Peano, pois ele notou que se essas funções fossem de grau no máximo n, então elas formariam um sistema linear de dimensão n + 1 e assim, se fossem consideradas todas as funções, a dimensão desse sistema linear seria infinita (MOORE, 1995).

Para Dorier (2000), a sistematização de Peano – fruto tanto de seu próprio trabalho com a lógica e com o formalismo, quanto de sua leitura sobre o *Die Lineale Ausdehnungslehre* – em que ele apresentou no primeiro capítulo os fundamentos da lógica dedutiva e apenas no último exibiu uma abordagem axiomática dos seus sistemas lineares, fez com se tornasse evidente o poderoso modelo de generalização vetorizado por essa abordagem.

No mesmo ano Peano usou a linguagem e alguns resultados de sua abordagem axiomática em um artigo no qual ele resolveu um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis. A solução apresentada por Peano foi muita mais moderna do que qualquer um de seus contemporâneos, ao utilizar ideias de norma euclidiana, autovalores, substituições lineares etc. Tal fato evidencia o poder de unificação e generalização que a axiomatização de Peano possuía, além do que propôs um interessante uso do modelo geométrico para generalização (DORIER, 2000).

Apesar de tudo, o livro de Peano não exerceu grande influência fora da Itália e dentro dela apenas os seguidores de Grassmann se interessaram por parte de sua obra (eles não se interessaram por seus sistemas lineares). Os únicos que se interessaram por sua abordagem axiomática foram os matemáticos sob sua influência pessoal, a saber, Salvatore Pincherle (1853 – 1936), Cesare Burali-Forti (1861 – 1931) e Roberto Marcolongo (1862 – 1943), os quais buscaram reafirmar a simplicidade e a praticidade do método axiomático proposto do Peano.

Pincherle utilizou a abordagem axiomática para apresentar uma teoria para os operadores lineares de dimensão finita – trabalhando também com espaços lineares de dimensão infinita – e tentou generalizar essa abordagem para os operadores funcionais, contribuindo assim para um processo de unificação das dimensões finitas e infinitas dos operadores (DORIER, 2000).

Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo, apresentaram uma definição axiomática (menos completa que a de Peano) dos métodos vetoriais e suas aplicações na Matemática e na Física, em especial, relacionados aos sistemas lineares e operadores lineares. Contudo, ainda que estivesse coadunada na busca por cálculo liberto de coordenadas, a sua abordagem tornou o poder de generalização e unificação limitado à estrutura da geometria e da física (DORIER, 2000).

Em paralelo aos esforços empregados pelos matemáticos citados anteriormente, em defesa da axiomatização dos métodos vetoriais, um outro tipo de tratamento axiomático para vetores emergiu do trabalho de Gaston Darboux (1842 – 1917), publicado em 1875, e no qual ele apresentou 4 proposições necessárias para a composição de forças na estática (lei do paralelogramo) em geometria pura (MOORE, 1995).

> Dados n segmentos direcionados, todos começando do mesmo ponto O, a lei da composição é tal que:
> 1) A resultante total é única e não muda ao se permutar a ordem das resultantes parciais
> 2) A resultante total não é alterada por uma rotação dos segmentos em torno de O
> 3) A lei da composição reduz à adição algébrica para segmentos com a mesma direção
> 4) A direção e magnitude da resultante são funções contínuas dos segmentos (DARBOUX, 1875 *apud* MOORE, 1995, p. 275, tradução nossa).

Conforme é possível refletir no estudo de Moore (1995), os axiomas de Darboux fundamentaram também as diversas empreitadas rumo a defesa de uma abordagem axiomática no estudo dos vetores, e ainda, a criação de novos conceitos e artifícios algébricos, que por sua vez também contribuíram para a constituição da Álgebra Linear. Rudolf Schimmack (1881 – 1912), Georg Hamel (1877 – 1954) e Hermann Weyl (1888 – 1955), foram alguns dos matemáticos que se empenharam sobre tal propósito.

Entre 1903 e 1907, Schimmack e Hamel realizaram, de maneira independente, uma análise sobre os axiomas de Darboux, chegando ambos à conclusão de que a independência do quarto axioma era equivalente a existência de uma solução real descontínua f que satisfizesse a equação funcional $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todos reais x e y. Como Hamel havia dado uma solução para esse tipo de equação em 1901, chegou à conclusão de que os axiomas para a adição de vetores exigiam um axioma de continuidade (MOORE, 1995).

Além disso, Hamel também provou a existência do que chamou de ‘base para todos os números’ que, em termos modernos, remonta a noção de base para o espaço vetorial dos números reais sobre o campo dos números racionais. Duas noções equivalentes ao conceito de base coexistiam, a saber, a de um conjunto máximo linearmente independente e a de um conjunto ortogonal máximo, contudo, em espaços de dimensão infinita elas divergiam. Hamel adotou a primeira ideia e, por tratar-se de um contexto particular, fez emergir a noção do que ficou conhecido como ‘Base de Hamel’ (MOORE, 1995).

Weyl, por sua vez, apresentou uma definição axiomática de um espaço afim com base no espaço vetorial não limitado ao espaço tridimensional, os quais nomeou como variedades vetoriais lineares. Seu propósito era de mostrar como os axiomas da estrutura afim poderiam ser aplicados perfeitamente no R^n e nas equações lineares, além de também ter defendido que a teoria axiomática dos espaços vetoriais poderia ser deduzida naturalmente das equações lineares em vez da geometria, e assim, acabou por axiomatizar a noção de um espaço vetorial de dimensão finita sobre os reais (MOORE, 1995).

Apesar de ter sido o primeiro a teorizar de forma clara a estrutura linear de R^n que, em sua concepção, era a base da teoria das equações lineares, os esforços de Weyl – assim como os de Peano, Pincherle, Burali-Forte e Marcolongo – não obtive grande repercussão e esteve, em sua maioria, limitado à uma visão geométrica do processo, não avançado assim mais do que Grassmann havia caminhado. Desse modo, a noção de Espaços Vetoriais axiomáticos teve que ser redescoberta uma terceira vez, no contexto do que conhecemos hoje por Análise Funcional e Álgebra Moderna.

Com relação à Análise Funcional, cuja fundamentação encontra-se no estudo das equações diferenciais e sua utilização na resolução de problemas relacionados à linearidade, a adoção dos espaços vetoriais de funções contribuiu para a axiomatização desse campo de investigação, principalmente a partir da definição geral, dada por Frédéric Riesz (1880 - 1965) em 1918, acerca de um subespaço vetorial normal e fechado de funções.

É nesse contexto que, durante a década de 1920, os trabalhos de Hans Hahn (1879 – 1934), Norbert Wiener (1894 – 1964) e Stefan Banach (1892 – 1945) emergiram. A descoberta, de maneira independente, da noção de um Espaço Vetorial Normado, a partir do interesse em generalizar propriedades algébricas e topológicas de vários espaços, forneceram importantes contribuições ao processo de axiomatização dos Espaços Vetoriais (MOORE, 1995).

Em 1934, Andrei Kolmogorov (1903 – 1987), definiu de maneira mais restrita um espaço vetorial topológico, exigindo ainda que esse espaço tivesse uma topologia no qual a adição e a multiplicação escalar fossem contínuas. Em 1935, de maneira independente, John Von Neumann (1903 – 1957) também desenvolveu a noção de Espaço Vetorial Topológico ao generalizar completude de espaços métricos para espaços topológicos (MOORE, 1995).

Tais estudos, dentro da Álgebra Topológica, forneceram bases para a constituição da noção de módulo topológico, a qual seria fundamental para a generalização e unificação do conceito de Espaço Vetorial nos anos seguintes, como veremos mais a diante.

No contexto da Álgebra Topológica, à Emmy Noether (1882 – 1935) é creditado o mérito do pioneirismo em apresentar os conceitos modernos de anel, de ideal e de módulo sobre um anel em 1921. A preocupação de Noether com a teoria algébrica dos números, na perspectiva de Dedekind, tornou natural para ela formular a noção de um módulo sobre um anel, bem como restringir sua atenção aos módulos que eram finitos, isto é, gerados finitamente (MOORE, 1995).

No ano de 1929, Noether publicou um artigo sobre álgebras de dimensão finita no qual apresentou a definição moderna de módulo sobre um anel de maneira mais simples do que havia feito em 1921. Seu propósito era reunir a teoria das álgebras com a teoria das representações de grupo (que havia sido unificada na obra de Frobenius, mas que se perdeu no caminho), o que a permitiu relacionar as noções de transformação linear, matriz e módulo (MOORE, 1995).

> Como B. L. Van der Waerden me comunicou, pode-se obter uma conexão invariável, independente da escolha específica da base, separando os conceitos de transformação linear e matriz. Uma transformação linear é um homomorfismo de dois módulos de formas lineares; uma matriz é uma expressão (a representação) desse homomorfismo por uma escolha definida de base (NOETHER, 1929 *apud* MOORE, 1995, p. 300, tradução nossa).

Tais noções foram apresentadas de maneira mais clara por Van der Waerden (1903 – 1996).

Em 1930 e 1931 ele publicou os dois volumes de seu livro *Moderne Algebra*, produzido com base em palestras ministras por Emmy Noether e Emil Artin (1898 – 1962) e que foi altamente influente. No primeiro volume, ele definiu um módulo como um grupo abeliano aditivo com um domínio de operadores (isto é, um homomorfismo) que forma um anel e satisfaz certos axiomas (MOORE, 1995).

No segundo volume, Van der Waerden dedicou um capítulo inteiro aos módulos, mais precisamente aos módulos unitários finitamente gerados que têm uma base, que ele chamou módulos de formas lineares sobre um anel K, e assim, no capítulo intitulado 'Álgebra Linear' o supracitado matemático definiu a Álgebra Linear como o estudo de módulos sobre um anel e seus homomorfismos (transformações lineares), os quais são escritos na forma de matrizes quando o módulo tem uma base finita (MOORE, 1995).

Com base no que fora exposto, é possível observar que a abordagem axiomática dos vetores, propostas por Peano e Darboux, permitiu o tratamento mais fácil e prático para a resolução de problemas de linearidade, contudo, da mesma maneira como a geometria n-dimensional de Grassmann, não tiveram grandes repercussões, ainda que os matemáticos que usaram tais abordagens tivessem realizados descobertas interessantes.

Assim, a facilidade e praticidade que uma abordagem axiomática e formal proporciona ao estudo dos objetos estudados em Álgebra Linear tornou-se mais expressiva quando os processos de unificação e generalização de conceitos dentro da Análise Funcional e das Estruturas Algébricas foram alcançados, permitindo assim, a constituição do conceito de Espaço Vetorial.

5 CONSIDERAÇÕES

Neste trabalho tínhamos por objetivo investigar como o formalismo e a axiomatização se fizeram presentes no âmbito dos processos de unificação e generalização inerentes ao desenvolvimento histórico-epistemológico de conceitos subjacentes à Álgebra Linear.

Diante do que fora apresentado, foi possível observar que os conceitos que compõem a Álgebra Linear são advindos de difentes épocas e áreas de estudo – tais como Álgebra, Geometria e Cálculo – e em cada uma dessas etapas/zona de investigação a necessidade de processos de unificação e generalização evocou a adoção de uma linguagem possibilitadora desses processos.

O tratamento intuitivo dos sistemas de equações lineares no início do século XVIII foi o marco inicial da emersão de conceitos subjacentes à Álgebra Linear, mais precisamente, os de Dependência, Posto e Dualidade. A funcionalidade do formalismo, como linguagem unificadora das equações e n-uplas com relação a linearidade, proposto por Frobenius, pode ser percebida por sua contribuição para o desenvolvimento do conceito de Posto, em um caráter mais generalizado, que por sua vez tornou mais simples a resolução de problemas lineares.

A busca por um cálculo geométrico liberto de coordenadas, tal qual Leibniz preconizava, foi perseguido por muitos matemáticos e possibilitou grandes contribuições ao cálculo vetorial e até mesmo aos Espaços Vetoriais. Grassmann foi o primeiro a avançar rumo à uma geometria n-dimensional e, na oportunidade, apresentou conceitos da Álgebra Linear em um caráter mais unificador e generalizante, contudo, a linguagem formal adotada por ele não foi suficiente para a aceitação de seu trabalho na academia

Ao compreender as potencialidades do trabalho de Grassmann, Peano dedicou-se em reapresentar a referida obra de maneira mais acessivel e a fez por meio de uma abordagem axiomática. O processo axiomático também adotado por Peano no que chamou de sistemas lineares (espaços vetoriais sobre os reais), evidenciou a praticidade advinda desse tipo de abordagem em relação aos demais métodos resolutivos.

A leitura das abordagens de Grassmann e de Peano em seus trabalhos nos evidenciam a interdependência entre as linguagens formal e axiomática no processo de unificação e generalização dos espaços vetoriais e, de maneira geral, nos conceitos subjacentes à Álgebra Linear. Assim, a relação entre esses aspectos foi redescoberto no contexto da Análise Funcional e da Álgebra Topológica.

No contexto da Análise Funcional, os espaços vetoriais foram redescobertos por meio e uma abordagem axiomática que permitiu a unificação e generalização de diversos contextos, dentro os quais, o das funções. Paralelamente a isso, Álgebra Moderna figurou como contexto de amadurecimento e consolidação de uma definição de Espaço Vetorial como um módulo topológico sobre um anel.

Desse modo, diante do que fora apresentado, é possível concluir que o formalismo e axiomatização surgem como linguagens técnicas complementares e necessárias aos processos de unificação e generalização de problemas de linearidade, além do que permitiram a constituição da Álgebra Linear como campo que estuda os módulos sobre um anel e seus homomorfismos, que conhecemos por transformações lineares, os quais são representados por matrizes quando o módulo tem uma base finita.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3944 ISSN 1984-7505

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. P. G. **Vetores: interações à distância para a aprendizagem de Álgebra Linear.** 2010. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2010, Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4038. Acesso em: 15 jan. 2022.

BARONI, R. L. S.. Aspectos Históricos de alguns conceitos da Álgebra Linear. Belém: SBHMat, 2009. Disponível: https://crephimat.com.br/visor_mnc.php?id_t=55. Acesso em: 15 jan. 2022.

DORIER, J. *Et. al.* Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University**.** *In the Proceedings of the 18th conference of the international group for psychology of Mathematics Education*, Lisbonne, v. 4, 1994, p. 137-144. Disponível em: https://www.academia.edu/34882137/TEACHING_AND_LEARNING_LINEAR_ALGEBRA_IN_FIRST_YEAR_OF_FRENCH_SCIENCE_UNIVERSITY. Acesso em: 15 jan. 2022.

DORIER, J. A general outline of the Genesis of Vector Space Theory. **Historia da Mathematica**. v. 22, 1995, p. 227-261. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710245. Acesso em: 15 jan. 2022.

DORIER, J. The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. **Linear Algebra and its applications.** 1998, p. 141-160. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/82815725.pdf. Acesso em: 15 jan. 2022.

DORIER, J. Epistemological Analysis of The Genesis of Theory of Vector Spaces. *In:* DORIER, J. **On the Teaching of Linear Algebra**. Grenoble: Kluwer Academia Publishers, 2000. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226988581_Epistemological_Analysis_of_the_Genesis_of_the_Theory_of_Vector_Spaces. Acesso em: 15 jan. 2022.

DIAS, R. M. da C. **Um estudo acerca da inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear.** 2022. 141 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/14735. Acesso em: 23 fev. 2022.

GRANDE, A. L. **O conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. 2006. 208 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11123. Acesso em: 15 jan. 2022.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of Linar Algebra: 1975 – 1940. **Historia Mathematica,** v. 22, n. 3, p. 262-303, 1995.

TÁBOAS, P. Z. Um estudo sobre as origens dos Espaços Vetoriais. **Revista Brasileira de História da Matemática**. v. 10, n. 19, 2010, p. 1 – 38. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/147. Acesso em 15 jan. 2022.

SOUZA, M. L. **Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática.** 2016. 128 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016. Disponível em: https://repositorio.uel.br/handle/123456789/15188. Acesso em: 15 jan. 2022.

WUSSING, Hans. Lecciones de historia de las Matemáticas. Barcelona: Siglo XXI, 1998. Disponível em: http://www.librosmaravillosos.com/leccionesdelahistoriadelasmatematicas/pdf/Lecciones_de_historia_de_las_matematicas_-_H_Wussing.pdf. Acesso em: 15 jan. 2022.

COMO CITAR - ABNT

DIAS, Renan Marcelo da Costa; BRANDEMBERG, João Cláudio; MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio. O formalismo e a axiomatização no desenvolvimento histórico e epistemológico da álgebra linear. **Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 17, n. 31, *e*22007, jan./jul., 2022. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3944

COMO CITAR - APA

Dias, R. M. da C., Brandemberg, J. C., Messias, M. A. de V. F. (2022). O formalismo e a axiomatização no desenvolvimento histórico e epistemológico da álgebra linear. *Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências*, *17*(31), *e*22007. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v17.n31.3944

HISTÓRICO

Submetido: 25 de março de 2022.
Aprovado: 18 de maio de 2022.
Publicado: 30 de julho de 2022.
