Areté
Revista Amazônica de Ensino de Ciências

SOLUÇÕES COMPLEXAS EM EDOs DE 2ª ORDEM: UMA ABORDAGEM QUALITATIVA NO ENSINO

COMPLEX SOLUTIONS IN 2ND-ORDER ODEs: A QUALITATIVE APPROACH TO TEACHING

SOLUCIONES COMPLEJAS EN EDOs DE 2º ORDEN: UN ENFOQUE CUALITATIVO EN LA ENSEÑANZA

Ana Carla Pimentel Paiva [1]
Francisco Régis Vieira Alves [2]
Helena Maria Barros de Campos [3]

RESUMO

Este artigo investiga o estudo de soluções complexas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) não homogêneas, com a utilização do software Geogebra no ensino de matemática em nível superior. A metodologia adotada baseia-se nos princípios da Engenharia Didática (ED), uma abordagem que favorece a análise sistemática dos processos de ensino e aprendizagem. A pesquisa enfatiza o desenvolvimento do conhecimento conceitual dos alunos, promovendo uma compreensão mais profunda das propriedades das soluções das EDOs não homogêneas. Nesse contexto, foi elaborada uma sequência didática voltada para o estudo qualitativo e visual das soluções, por meio de representações gráficas interativas. Essa proposta se articula ao desenvolvimento de um Estudo Qualitativo com aporte na Visualização - EQV, ao valorizar a integração entre os aspectos algébricos, geométricos e dinâmicos das equações. O uso do software Geogebra permite que os alunos explorem a relação entre as condições iniciais e o comportamento dinâmico das soluções. A análise desse comportamento facilita o entendimento dos fenômenos representados pelas equações diferenciais, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e aplicável em diversos contextos científicos e tecnológicos.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias Não Homogêneas. Soluções Complexas. Geogebra. Engenharia Didática. Estudo Qualitativo com aporte na Visualização.

ABSTRACT

This article investigates the study of complex solutions of non-homogeneous Ordinary Differential Equations (ODEs), using the Geogebra software in undergraduate mathematics teaching.

[1] Doutoranda no Programa de Doutorado em Ensino em REDE – RENOEM/IFCE, Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: carlapimentel00@gmail.com. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8323398930648602. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5801-9562

[2] Doutorado em ensino de Matemática (UFC - 2011). Professor do Doutorado em rede pelo RENOEM - IFCE, Fortaleza, Cerá, Brasil. Email: fregis@ifce.edu.br. Lattes: http://lattes.cnpq.br/3288513376230522. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

[3] Doutorado em Matemática em 2008 pela Universidad de Educación a Distancia. Professora de Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro Departamento de Matematica - UTAD, Vila Real, Portugal. Email: hcampos@utad.pt. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2767-0998. Site: https://www.cienciavitae.pt/portal/9F17-CDF8-0EF1

The adopted methodology is based on the principles of Didactical Engineering, an approach that promotes systematic analysis of teaching processes. The research emphasizes the development of students' conceptual knowledge, fostering a deeper understanding of the properties of non-homogeneous ODE solutions. In this context, a didactic sequence was designed to support the qualitative and visual study of the solutions through interactive graphical representations. This proposal is aligned with the development of a Qualitative Study with Visualization Support - EQV as it values the integration of algebraic, geometric, and dynamic aspects of the equations. The use of Geogebra allows students to explore the relationship between initial conditions and the dynamic behavior of the solutions. The analysis of this behavior facilitates the understanding of the phenomena represented by differential equations, contributing to more meaningful teaching applicable in various scientific and technological contexts.

Keywords: Ordinary Differential Equations Non-Homogeneous. Complex Solutions. Geogebra. Didactic Engineering. Qualitative Study with Visualization Support.

RESUMEN

Este artículo investiga el estudio de soluciones complejas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) no homogéneas, mediante el uso del software Geogebra en la enseñanza de matemáticas a nivel superior. La metodología adoptada se basa en los principios de la Ingeniería Didáctica, un enfoque que favorece el análisis sistemático de los procesos de enseñanza. La investigación enfatiza el desarrollo del conocimiento conceptual de los estudiantes, promoviendo una comprensión más profunda de las propiedades de las soluciones de EDOs no homogéneas. En este contexto, se diseñó una secuencia didáctica orientada al estudio cualitativo y visual de las soluciones, a través de representaciones gráficas interactivas. Esta propuesta se articula con el desarrollo de un Estudio Cualitativo con apoyo en la Visualización - EQV al valorar la integración de los aspectos algebraicos, geométricos y dinámicos de las ecuaciones. El uso del software Geogebra permite a los estudiantes explorar la relación entre las condiciones iniciales y el comportamiento dinámico de las soluciones. El análisis de dicho comportamiento facilita la comprensión de los fenómenos representados por las ecuaciones diferenciales, contribuyendo a una enseñanza más significativa y aplicable en diversos contextos científicos y tecnológicos

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. Soluciones complejas. Geogebra. Ingeniería Didáctica. Estudio Cualitativo con apoyo en la Visualización.

1 INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) é amplamente reconhecido como uma disciplina central em diversos campos da ciência, como matemática, física e engenharia, devido à sua capacidade de descrever fenômenos dinâmicos (Paiva, Alves e Campos,2024).

As EDOs modelam uma vasta gama de processos naturais e artificiais, desde o movimento de corpos em mecânica clássica até a variação de populações em ecologia, a condução de calor em materiais e os circuitos elétricos. Dentre as diversas classes de equações diferenciais, as EDOs não homogêneas desempenham um papel crucial, pois representam sistemas em que há uma força externa ou função impulsionadora, como uma força aplicada em um sistema mecânico ou uma corrente elétrica em um circuito (Boyce e Diprima, 2010).

No entanto, as soluções complexas dessas equações frequentemente apresentam desafios consideráveis para os estudantes. Uma das dificuldades está na natureza abstrata das soluções, que muitas vezes envolvem combinações de funções exponenciais e trigonométricas complexas, sem uma representação visual ou física clara.

Essa abstração pode dificultar o desenvolvimento de uma intuição matemática sólida sobre o comportamento das soluções, especialmente em relação a fenômenos como oscilações, amortecimento e ressonância (Javaroni, 2007).

Além disso, o próprio processo algébrico de resolução, que inclui a determinação da solução homogênea e particular, a análise das condições iniciais e a interpretação das raízes da equação característica, pode ser uma barreira para os alunos.

Diante desse cenário, o uso de ferramentas computacionais pode oferecer uma abordagem mais intuitiva e acessível ao ensino de matemática (Castillo, Mendes e Sanchez,2024). Em relação ao ensino de EDOs, o uso dessas ferramentas permita a visualização gráfica e a exploração dinâmica das soluções. Um dos softwares que se destaca nessa área é o Geogebra, uma plataforma amplamente utilizada no ensino de matemática que combina recursos de álgebra, geometria e cálculo em um ambiente interativo.

Assim através do Geogebra, é possível modelar EDOs, traçar suas soluções e explorar visualmente o comportamento dinâmico das funções ao longo do tempo, algo que seria difícil de ser compreendido apenas com manipulações algébricas.

O trabalho ainda se apoia no conceito do Estudo Qualitativo com aporte na Visualização (EQV), que fundamenta a integração dos aspectos algébricos, geométricos e dinâmicos na tentativa de auxiliar no favorecimento a compreensão das soluções complexas.

O trabalho se apoia no conceito do Estudo Qualitativo com aporte na Visualização (EQV), que está sendo desenvolvido na pesquisa de doutorado da primeira autora. Esse conceito fundamenta a integração dos aspectos algébricos, geométricos e dinâmicos com o objetivo de favorecer a compreensão das soluções complexas.

Estudos recentes publicados reforçam avanços do EQV em relação ao ensino da teoria das EDOs, incluindo a compreensão do Teorema da Existência e Unicidade (Paiva; Alves;

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

Campos e Pinheiro, 2024) e investigações sobre o lugar geométrico dos pontos característicos utilizando o Geogebra (Paiva, Alves, Campos e Cidrão, 2024).

Desse modo, através do Geogebra, é possível modelar EDOs, traçar suas soluções e explorar visualmente o comportamento dinâmico das funções ao longo do tempo, algo que seria difícil de ser compreendido apenas com manipulações algébricas.

Portanto, este artigo tem como objetivo desenvolver atividades no Geogebra que possam auxiliar o aluno na compreensão acerca do comportamento das soluções complexas. Para o desenvolvimento dessas atividades, o estudo será guiado pelo arcabouço teórico da Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas, que fornecem uma base metodológica robusta para a análise de situações de ensino-aprendizagem em matemática.

A Engenharia Didática (ED) refere-se a uma metodologia de pesquisa em didática da matemática que busca investigar e melhorar os processos de ensino e aprendizagem por meio de experimentações e análises sistemáticas (Alves e Catarino, 2017).

Enquanto a Teoria das Situações Didáticas (TSD) descreve o processo de ensino e aprendizagem como uma interação entre o aluno, o professor e o meio, organizado em situações didáticas específicas. A TSD estrutura a aprendizagem em torno de fases ou momentos que favorecem a construção ativa do conhecimento pelo aluno (Almouloud, 2016).

Portanto, este trabalho se justifica não apenas pela relevância do estudo das EDOs em contextos aplicados, mas também pela necessidade de incorporar metodologias inovadoras e tecnologias digitais ao ensino da matemática, de forma a tornar o aprendizado mais acessível e significativo para os alunos. Ao utilizar o Geogebra como ferramenta pedagógica, espera-se promover uma compreensão mais profunda e intuitiva das EDOs, facilitando o desenvolvimento de competências matemáticas essenciais e contribuindo para a formação de futuros profissionais que necessitam dessas habilidades em suas áreas de atuação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Uma equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes possui termos envolvendo a função $y(x)$ e suas derivadas, acompanhados de uma função externa $g(x)$ diferente de zero, sendo determinada da seguinte forma:

$$a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x) \text{ (Boyce e Diprima,2010).}$$

Nessa equação, o lado esquerdo contém termos envolvendo a função $y(x)$ e suas derivadas, com coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ constantes reais. O termo $g(x)$ no lado direito é o que caracteriza a equação como **não homogênea**, pois representa uma função que não é zero. Em relação, a função $g(x)$ que pode ser uma função de x como um polinômio, exponencial, senoidal etc.

Conforme (Boyce e Diprima, 2010) o método de resolução EDO não homogênea envolve dois passos principais: resolver a equação homogênea associada, depois encontrar uma solução particular da equação completa. Assim, a solução geral será dada por :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Para resolver a **equação diferencial linear homogênea associada**, igualamos o termo não homogêneo $g(x)$ a zero (De Figueiredo e Neves, 2018):

$$a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \Rightarrow y''(x) + {}^{a_1}/_{a_2}\, y'(x) + {}^{a_0}/_{a_2}\, y(x) = 0,$$

definindo $a_k = {}^{a_1}/_{a_2}$ e $b = {}^{a_0}/_{a_1}$, dispomos:

$$y''(x) + a_ky'(x) + by(x) = 0.$$

Em seguida, substituímos $y(x)$ por e^{rx}, e derivamos para obter a equação característica:

$$r^2 + a_kr + b = 0 \ (1)\,.$$

Segundo Boyce e Diprima (2010) com base na uma equação do segundo grau (1) e no valor de Δ classificamos as soluções da equação diferencial ordinária:

Se $\Delta > 0$, temos raízes distintas reais: Se a equação característica tem n raízes reais e distintas, $r_1, r_2, \dots, r_n$ a solução geral é da forma: $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$.

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \cdots + C_ne^{r_nx}, \text{ com } C_1, C_2, \dots, C_n \text{ constantes reais.}$$

Se $\Delta = 0$, iremos dispor de raízes repetidas, com $r_1 = r_2 = \cdots r_k$, as soluções associadas serão multiplicadas por potências de x:

$$C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_2x}$$

Por fim, o objeto de interesse do nosso artigo, se $\Delta < 0$, encontraremos as raízes complexas com a solução correspondente:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2sen(\beta x)).$$

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

Em que o valor das constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições iniciais fornecidas no Problema de Valor Inicial (De Figueiredo e Neves, 2018). A seguir, apresentaremos um exemplo de como ocorre tal mecanismo de resolução.

Exemplo: Considere a seguinte equação diferencial de segunda ordem não homogênea

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = sen(x),$$

em que a função $g(x) = sen(x)$ e a equação homogênea correspondente, trata-se da equação: $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$, equação característica associada:

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Resolvendo essa equação quadrática com a fórmula de Bhaskara:

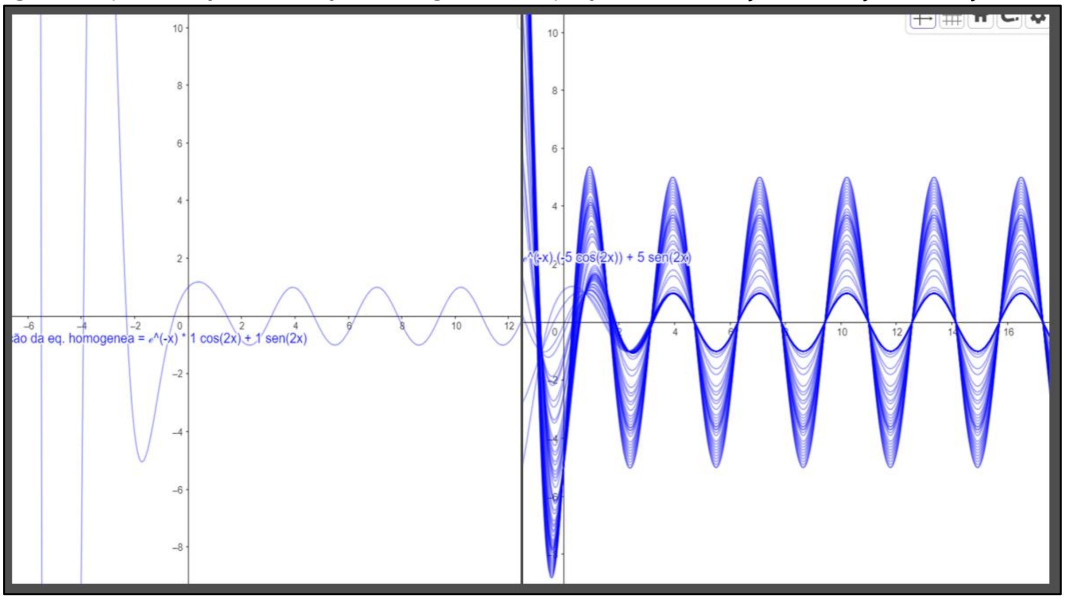
$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.5}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Portanto, a solução geral da equação homogênea será dada pela forma:

$$y_h(x) = e^{-x}(C_1(\cos(2x)) + C_2(\mathrm{sen}(2x)))$$

No *software* Geogebra, é possível visualizar e compreender como a solução de uma EDO se comporta de forma dinâmica, isto é, podemos analisar como a função solução se comporta quando o valor da variável independente tende ao infinito, se a solução se aproxima de um valor constante ou se oscila indefinidamente, conforme explanado na Figura 1.

Figura 1– Apresentação da solução homogênea da equação diferencial $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$



Fonte: Elaborado pelos autores

Na figura 1, se apresentou que a solução da EDO é periódica depois de determinado ponto e o comportamento oscilatório da função. O software ainda permitiu o Geogebra, manipular as condições iniciais para verificar como o período e a amplitude de oscilações mudam, fornecendo uma compreensão visual e intuitiva do comportamento oscilatório.

Conforme o mecanismo de resolução da EDO não-homogênea descrito em De Figueiredo e Neves (2018), prosseguiremos com a resolução da EDO para encontrar a **solução particular** $y_p(x)$ que satisfaça a equação não homogênea. Existem diferentes métodos para encontrar $y_p(x)$, dependendo da forma de $g(x)$, nesse artigo empregaremos o método dos coeficientes a determinar.

Em que se baseia na natureza da função $g(x)$ seja uma função um polinômio, exponencial ou senoidal. Supomos uma forma para y_p semelhante a $g(x)$ e determinamos os coeficientes substituindo na EDO.

Dessa forma, conforme (De Figueiredo e Neves, 2018) se estabelece que:

- Se a função $g(x)$ for uma função um polinomial, o método dos coeficientes a determinar, estabelece que se deve buscar a solução particular na forma de função polinomial.

- Se a função $g(x)$ for uma função exponencial, se pode procurar por uma solução particular que pode ser definida como $y_p(x) = Ae^{kx}$.

- Se a função $g(x) = sen(x)$ ou $g(x) = cos(x)$, tenta-se estabelecer uma $y_p(x) = A\cos(kx) + Bsen(kx)$.

Retornando ao nosso exemplo, a solução particular para o termo não homogêneo, a função $g(x) = sen(x)$. Como o termo $sen(x)$ não é parte da solução homogênea, podemos propor uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = A\cos(x) + Bsen(x).$$

Calculamos as derivadas de $y_p(x)$, temos:

$$y_p' = -Asen(x) + Bcos(x) \text{ e } y_p'' = -Acos(x) - Bcos(x).$$

Substituindo $y_p(x), y_p'(x)$ e y_p'' na EDO original $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = sen(x)$:

$$-Acos(x) - Bcos(x) + 2\big(-Asen(x) + Bcos(x)\big) + 5(A\cos(x) + Bsen(x)) = sen(x)$$

$$(-A + 2B + 5A)\cos(x) + (-B - 2A + 5B)sen(x) = sen(x)$$

$$(2B + 4A)\cos(x) + (-2A + 4B)sen(x) = sen(x)$$

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

Igualando os termos de correspondentes a $\cos(x)$ e $sen(x)$ do primeiro membro da equação com o do segundo membro, dispomos do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4A + 2B = 0 \ (coeficientes\ de\ \cos(x)) \\ -2A + 4B = 1 (coeficientes\ de\ \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, encontramos $A = 0$ e $B = {}^{1}/_{4}$. Assim, a solução particular $y_p(x) = {}^{1}/_{4}\, sen(x)$. Portanto, a solução geral da equação

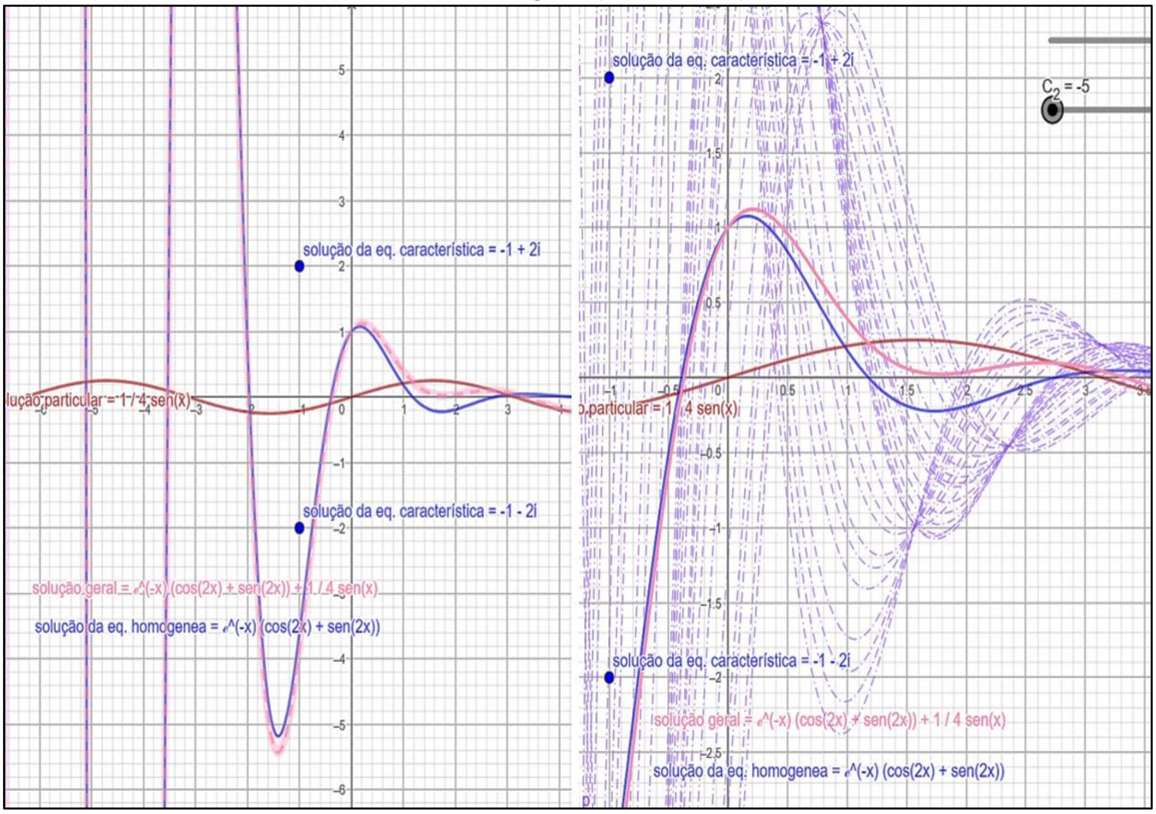
$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = sen(x),$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = e^{-x}(C_1(\cos(2x)) + C_2(\operatorname{sen}(2x))) + {}^{1}/_{4}\, sen(x).$$

Na figura 2, apresentamos a representação da solução particular e a solução geral da equação diferencial $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = sen(x)$, exibindo como a amplitude (a altura dos picos das oscilações) e o período (o tempo que leva para completar um ciclo) se modificam.

Figura 2 – Comportamento das soluções da equação não-homogênea(cor azul), equação particular(cor vermelha) e não homogênea(tons de rosa)



Fonte: Elaborado pelos autores

De modo mais detalhado, na figura 2 à direita, apresenta-se o comportamento da solução homogênea (curva de cor azul), a solução particular (representada na cor vermelho), e como essas soluções se combinam resultando na solução geral representada pela curva na cor rosa.

Além disso, na figura 2 à esquerda, contempla-se a possibilidade de visualizar a influência desses parâmetros, C_1 e C_2 , variando de -5 a 5, auxiliando os alunos a desenvolverem uma intuição mais sólida sobre o papel de cada componente da solução.

3 METODOLOGIA

A Didática da Matemática (DM) é um campo de estudo dedicado ao ensino da matemática, que enfatiza os aspectos epistemológicos, metodológicos e cognitivos envolvidos na aprendizagem e no ensino dessa disciplina (ALVES, 2016). Seu objetivo principal é compreender como os conceitos matemáticos são construídos pelos alunos e organizar o processo de ensino de forma a favorecer essa construção de maneira eficaz e significativa.

Segundo Alves (2016), a DM fundamenta-se na análise das condições que possibilitam um ensino efetivo, ressaltando a importância do papel do professor, do material didático e do contexto educacional.

Essa abordagem evidencia a necessidade de uma prática pedagógica que articule teoria e prática, promovendo ambientes de aprendizagem ricos e significativos. A partir desses fundamentos, desenvolveu-se a Engenharia Didática, metodologia que estrutura a criação, experimentação e avaliação de sequências didáticas, com foco na melhoria contínua do ensino e na superação das dificuldades observadas no processo educacional (ALVES, 2016).

Nesse sentido, a metodologia adotada neste estudo, a Engenharia Didática (ED), conforme Alves e Catarino (2017), refere-se a uma abordagem que possibilita a construção de situações de ensino-aprendizagem de maneira planejada, reflexiva e iterativa, fundamentada na sistematização e análise contínua das práticas educativas.

A ED se caracteriza por um ciclo de quatro fases fundamentais: análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori. Cada uma dessas etapas tem o objetivo de desenvolver uma compreensão mais profunda sobre como o conhecimento é construído pelos alunos, além de oferecer subsídios para ajustar as atividades de ensino com base nas interações e dificuldades observadas (Paiva, Alves e Campos, 2024).

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

A análise preliminar envolve uma pesquisa detalhada sobre o conteúdo a ser ensinado e o levantamento das dificuldades mais comuns enfrentadas pelos alunos. No caso das soluções complexas de EDO's lineares de segunda ordem não homogêneas, conforme Paiva, Alves e Campos (2024) as dificuldades geralmente estão associadas à compreensão das soluções complexas e à abstração envolvida no processo de resolução algébrica. É nessa fase que são delineados os principais objetivos pedagógicos e traçadas as competências que os alunos devem desenvolver ao longo das atividades.

A fase de concepção e análise a priori diz respeito à elaboração das atividades e intervenções didáticas com base nos resultados da análise preliminar. Neste estudo, a concepção das atividades emprega o *software* Geogebra, que oferece aos alunos a possibilidade de explorar as soluções complexas de EDOs não homogêneas de maneira visual e dinâmica (Alves, 2020).

Ao empregar o Geogebra como uma ferramenta mediadora, pretende-se explorar a manipulação gráfica das soluções, o que facilita a interpretação de conceitos como oscilações, amortecimento e comportamento dinâmico das equações. A análise a priori envolve a antecipação de possíveis soluções dos alunos, identificando quais caminhos podem ser mais produtivos e onde podem surgir dificuldades, permitindo ajustes antes da experimentação.

A experimentação refere-se a uma fase fundamental da Engenharia Didática, pois é através dela que se obtém dados empíricos sobre o que funciona e o que pode ser melhorado no processo de ensino. Essa fase, portanto, envolve a aplicação das atividades planejadas em um contexto real de ensino. Durante essa fase, o professor desempenha um papel mediador, guiando os alunos nas explorações e intervenções necessárias (Almouloud e Da Silva, 2012).

Nesse ponto, as atividades desenvolvidas deverão ser implementadas a um grupo de estudantes, permitindo observar como eles interagem com o software e como compreendem os conceitos relacionados às EDOs .

Por fim, Almouloud e Da Silva (2012) descreve que a análise a posteriori é realizada após a experimentação e visa avaliar os resultados alcançados, tanto em termos de desempenho dos alunos quanto da eficácia das atividades propostas. Nessa etapa, são analisados os registros das interações dos alunos com o software e com as atividades, com o objetivo de identificar avanços no desenvolvimento do conhecimento conceitual e procedimental. Caso sejam identificadas dificuldades persistentes ou lacunas no entendimento, a sequência didática pode ser ajustada e refinada para novas iterações, mantendo o caráter cíclico e evolutivo da Engenharia Didática.

No entanto, faz se importante ressaltar que esse estudo se limita às duas primeiras fases da ED, a experimentação e a análise a posteriori não são abordadas. No entanto, o foco dessas duas primeiras etapas é fundamental para a elaboração de intervenções didáticas eficazes e o planejamento de uma sequência didática que possa, no futuro, ser testada e refinada.

3.1 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), criada por Guy Brousseau, propõe que o conhecimento é construído ativamente pelo aluno, ao ser colocado em situações que exigem a resolução de problemas e a exploração de conceitos. Nesse contexto, o papel do professor é mediar essas interações, promovendo um ambiente que favoreça a aprendizagem significativa. (Brousseau, 1986).

Conforme Almouloud (2016) essa teoria organiza a aprendizagem em fases que desempenham papéis distintos, mas complementares. Cada fase visa guiar o aluno na construção progressiva de seu conhecimento, desde a exploração inicial de uma situação-problema até a formulação e validação de hipóteses. Esse processo permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda dos conceitos, resolvendo problemas de forma autônoma e fortalecendo suas habilidades cognitivas, o que resulta em um entendimento mais sólido e aplicado.

A TSD se organiza em quatro fases principais: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação institucionalização.

Na situação de *ação*, o aluno é colocado em um ambiente onde deve resolver um problema, explorar um conceito ou enfrentar uma situação nova. Nesta fase, o professor apresenta uma tarefa ou desafio sem dar soluções diretas. O aluno utiliza seus conhecimentos prévios e experimenta várias abordagens para lidar com a situação. O objetivo é que o aluno se aproprie da situação e busque soluções por meio de tentativa e erro, ou de maneira exploratória (Almouloud, 2016).

Por exemplo, no contexto de equações diferenciais, o aluno pode ser convidado a explorar uma EDO no Geogebra, sem ter uma solução formal. Ele pode observar o

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

comportamento das curvas ou fazer conjecturas sobre a influência dos coeficientes e condições iniciais.

Segundo (Almouloud, 2016) a situação de *formulação*, inicia quando o aluno formaliza suas descobertas e hipóteses a partir da situação de ação. Esta fase incentiva a comunicação de resultados e estratégias, seja por meio de discussões em grupo, seja individualmente. O aluno precisa expressar e justificar suas escolhas, o que o ajuda a construir uma linguagem matemática mais precisa e clara.

Em um estudo de EDOs, nesta fase, os alunos poderiam discutir as soluções encontradas experimentalmente, formular expressões matemáticas que descrevem as soluções, ou interpretar graficamente os resultados obtidos no software. Eles começam a fazer conjecturas sobre as formas gerais das soluções, como a relação entre as partes homogêneas e não homogêneas da equação.

Na situação de *validação*, os alunos testam a validade de suas formulações e conjecturas. O professor conduz o aluno a verificar se as soluções ou hipóteses estão corretas. Os alunos comparam seus resultados com outros colegas, verificam se as soluções são coerentes com a teoria estudada e revisam suas abordagens, caso necessário. O processo de validação pode envolver a aplicação de métodos analíticos, o uso de software ou a comparação com resultados conhecidos (Almouloud, 2016).

Neste ponto, no estudo de EDOs, os alunos verificariam se as soluções propostas satisfazem as condições da equação diferencial, tanto analiticamente quanto graficamente. Eles podem testar suas soluções inserindo-as novamente na EDO original para garantir que a equação seja satisfeita.

A situação de *institucionalização* refere-se a fase em que o professor intervém diretamente para formalizar e validar os conhecimentos que os alunos desenvolveram ao longo das atividades. De acordo com Almouloud (2016) na institucionalização, o professor generaliza os conceitos trabalhados, conecta-os a outras áreas da matemática ou da ciência e destaca as conclusões mais importantes. O conhecimento construído pelo aluno é reconhecido e institucionalizado, ou seja, torna-se parte do currículo formal e é consolidado como um conteúdo que o aluno dominou.

No contexto de EDOs, o professor formalizaria os conceitos de soluções homogêneas e particulares, equações diferenciais com termos não homogêneos e a influência das raízes

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

complexas nas soluções. Também seria o momento de revisar metodologias de resolução, como o uso de equações características e o papel da função $g(x)$.

4 ANÁLISE E RESULTADOS

Nas situações - problema propostas, integramos os princípios da Engenharia Didática (ED) e da Teoria das Situações Didáticas (TSD) para estruturar uma sequência didática voltada ao estudo de uma equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem não homogênea, com soluções complexas. A proposta visa explorar tanto a resolução analítica quanto a visualização gráfica, utilizando o *software* Geogebra como ferramenta pedagógica (Alves e Catarino, 2017).

Nesse contexto, insere-se o Estudo Qualitativo com aporte na Visualização (EQV), uma abordagem didática em desenvolvimento nesta pesquisa, que integra os aspectos algébricos, geométricos e dinâmicos no ensino de EDOs. Com foco na análise qualitativa das soluções, o EQV utiliza a visualização gráfica para favorecer a compreensão de propriedades como estabilidade, oscilação e convergência.

Essa abordagem interativa e dinâmica busca ampliar a intuição matemática e a autonomia dos alunos no estudo de soluções complexas. Entre os recursos que podem ser empregados para viabilizar o EQV, destaca-se o software Geogebra, que potencializa a exploração visual e dinâmica do comportamento das soluções.

Salienta-se que para a aplicação das situações-problema, é fundamental que os alunos recebam uma aula teórica que aborde os conceitos fundamentais relacionados às equações diferenciais ordinárias (EDOs), incluindo definições, classificações e métodos de resolução. Essa base teórica proporciona um entendimento sólido que permitirá aos alunos abordarem as situações-problema de forma mais efetiva, reconhecendo as estruturas das EDOs e desenvolvendo estratégias apropriadas para a resolução. A combinação de teoria e prática facilitará a construção do conhecimento e a aplicação dos conceitos em contextos mais complexos.

Na primeira situação-problema, se explora um exemplo de uma EDO linear de segunda ordem não homogênea com soluções complexas onde o termo não homogêneo é uma função exponencial.

1ª) Situação – Problema: Nesta atividade, os alunos trabalharão com a equação diferencial não homogênea de segunda ordem dada por $y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = e^{2x}$.

O objetivo é que os alunos compreendam as características das soluções de EDOs não homogêneas, desenvolvendo habilidades de resolução de equações diferenciais, bem como habilidades analíticas e gráficas. Nesse sentido, a abordagem do Estudo Qualitativo com aporte na Visualização (EQV) orienta a exploração do comportamento das soluções por meio de representações gráficas e análises qualitativas, favorecendo a compreensão de propriedades como estabilidade, oscilação e convergência.

Fase de ação: os alunos são apresentados à equação diferencial sem informações adicionais sobre a forma de solução. O desafio é explorar a estrutura da equação e formular hipóteses sobre como resolver a parte não homogênea. Os alunos podem ser incentivados a discutir em grupos sobre as características da função e^{2x} e como isso pode impactar a solução da equação. Portanto, os alunos irão dispor das ferramentas gráficas do Geogebra para visualizar a função e^{2x} e conjecturar sobre a solução.

Fase da Formulação: Após a exploração e o desenvolvimento de conjecturas na fase da ação, os alunos deverão resolver a equação homogênea associada, determinando sua solução geral. Em seguida, deverão formular uma solução particular, escolhendo uma forma apropriada para $y_p(x)$.

Desse modo, a partir da equação homogênea associada:

$$y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = 0,$$

os alunos devem encontrar a equação característica $r^2 + 6r + 25 = 0$, e usando a fórmula de Bhaskara, encontrar as raízes $r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.25}}{2} \Rightarrow r = -3 \pm 4i$, concluindo que a solução da equação homogênea é:

$$y_h = e^{-3x}(C_1(\cos(4x)) + C_2(sen(4x))).$$

Com o intuito de determinar a solução particular y_p, os alunos devem propor uma forma que se assemelhe ao termo não homogêneo e^{2x}, o termo:

$$y_p = Ae^{2x},$$

e posteriormente calcular as derivadas:$y_p' = 2Ae^{2x}$ e $y_p'' = 4Ae^{2x}$. Ao substituir na equação original $y''(x) + 6y'(x) + 25 = e^{2x}$:

$$4Ae^{2x} + 6(2Ae^{2x}) + 25Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$(4 + 12 + 25)Ae^{2x} = e^{2x},$$

Dividindo ambos os lados da equação por e^{2x}, encontrando:

$$41\ A = 1 \Rightarrow A = {}^{1}/_{41}.$$

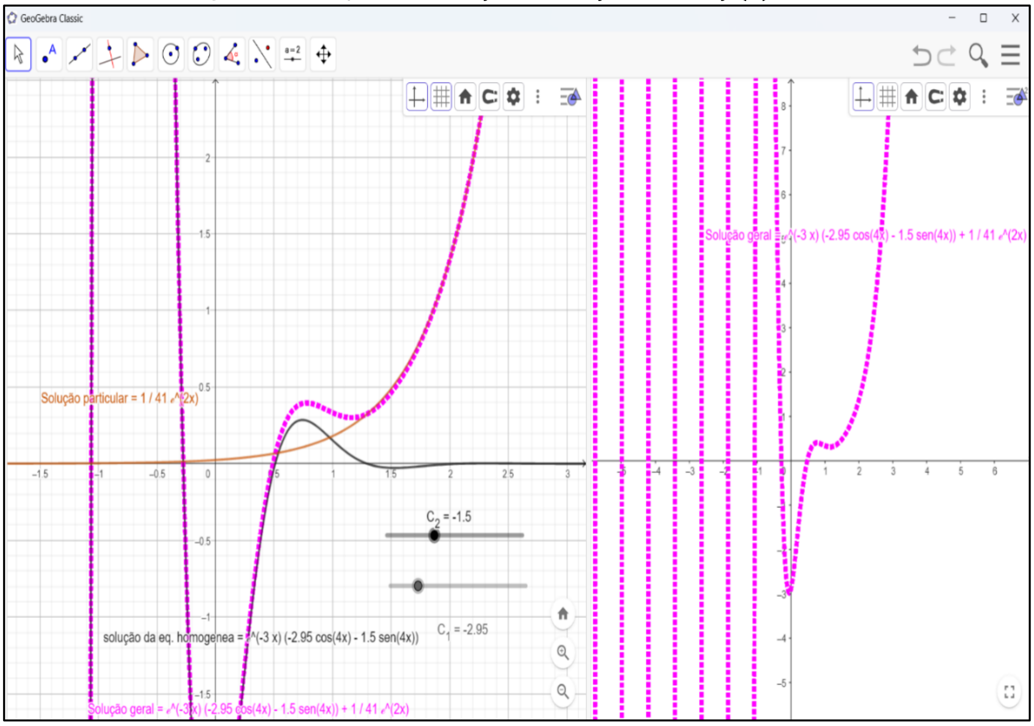
Portanto, a solução particular encontrada é $y_p = {}^{1}/_{41}\, e^{2x}$, e assim, a solução da equação diferencial:

$$y(x) = y_h + y_p = e^{-3x}(C_1(\cos(4x)) + C_2(sen(4x))) + {}^{1}/_{41}\, e^{2x},$$

onde as constantes são determinadas pelas condições iniciais.

Situação de Validação: os alunos validarão suas soluções, comparando a solução geral obtida com representações gráficas da função. Utilizando o *software* Geogebra, conforme explanado na Figura 3, eles poderão observar o comportamento das soluções e como diferentes parâmetros influenciam a solução final.

Figura 3 – Soluções da EDO $y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = e^{2x}$



Fonte: Elaborado pelos autores

O gráfico da solução mostrará o comportamento oscilatório dado pela solução homogênea $e^{3x}(C_1(\cos(4x)) + C_2(sen(4x))) + {}^{1}/_{41}\, e^{2x}$ com um fator de amortecimento

e^{3x} que faz com que as oscilações decaiam ao longo do tempo. Além disso, a solução particular $1/_{41}\, e^{2x}$ adiciona um crescimento exponencial ao gráfico, devido ao termo e^{2x}.

Situação de Institucionalização: na conclusão da atividade, o professor organizará uma discussão em classe, permitindo que os alunos compartilhem suas descobertas. Eles refletirão sobre a inter-relação entre a solução homogênea e a solução particular, além de discutir as implicações físicas e matemáticas do problema.

Ao final da atividade almejasse que os alunos sejam capazes de resolver EDOs não homogêneas, interpretar suas soluções e aplicar conhecimentos de matemática aplicada em contextos práticos, desenvolvendo uma compreensão mais profunda sobre as dinâmicas que essas equações representam.

Na segunda situação-problema é abordado a resolução de uma equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem não homogênea com soluções complexas, onde a função não homogênea g(x) é uma função trigonométrica. Ao empregar o software Geogebra nessa situação tenciona-se que os alunos visualizem o comportamento dinâmico das soluções e compreendam a interação entre as partes homogênea e não homogênea da equação.

2ª) Situação – Problema: Considere a seguinte EDO linear de segunda ordem não homogênea $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = cos(2x)$.

Fase da ação: O desafio inicial consiste em explorar a estrutura da equação e propor possíveis estratégias de resolução. Nesse momento, os estudantes podem conjecturar que, devido à natureza trigonométrica de $g(x) = cos(2x)$, a solução particular pode assumir uma forma semelhante à função não homogênea.

Nesta situação, os princípios do EQV estão presentes ao orientar a análise qualitativa do comportamento da solução, promovendo a integração dos aspectos algébricos e gráficos. Por meio de representações visuais e dinâmicas, o EQV facilita a compreensão da influência da função não homogênea sobre a solução geral, permitindo aos alunos observarem características como periodicidade, amplitude e estabilidade, fortalecendo, assim, a construção do conhecimento de maneira mais intuitiva e fundamentada.

Situação de Formulação: Após explorar o problema, os alunos são incentivados a formular a solução. Primeiro, os alunos devem resolver a equação homogênea associada:

$y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$, cuja equação característica é dada por:

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

$$r^2 + 4r + 13 = 0.$$

Usando a fórmula de Bhaskara, as raízes complexas são $r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow$ $r = -2 \pm 3i$. Portanto, a solução geral da equação homogênea é:

$$y_h(x) = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 sen(3x)).$$

Para o termo não homogêneo $g(x) = cos(x)$, propõem-se uma solução particular da forma: $y_p(x) = Acos(2x) + Bsen(2x)$, com $y_p' = -2Asen(2x) + 2Bcos(2x)$ e $y_p'' = -4Asen(2x) - 4Bcos(2x)$. Substituindo, na EDO $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = cos(2x)$, temos:

$$-4Asen(2x) - 4Bcos(2x) + 4\big(-2Asen(2x) + 2Bcos(2x)\big) + 13\big(Acos(2x) + Bsen(2x)\big) = \cos(2x).$$

Agrupando os termos $cos(2x)$ e $sen(2x)$:

$$(-4A + 8B + 13A)\cos(2x) + (-4B - 8A + 13B)sen(2x) = \cos(2x)$$
$$(-9A + 8B)\cos(2x) + (9B - 8A) = \cos(2x).$$

Comparando termo a termo do primeiro e segundo membro da equação, encontramos o sistema: $\begin{cases} -9A + 8B = 1 \\ 9B - 8A = 0 \end{cases}$, em que temos, com base na segunda equação do sistema, a relação $B = \frac{8A}{9}$.

Substituindo a relação na primeira equação do sistema temos:

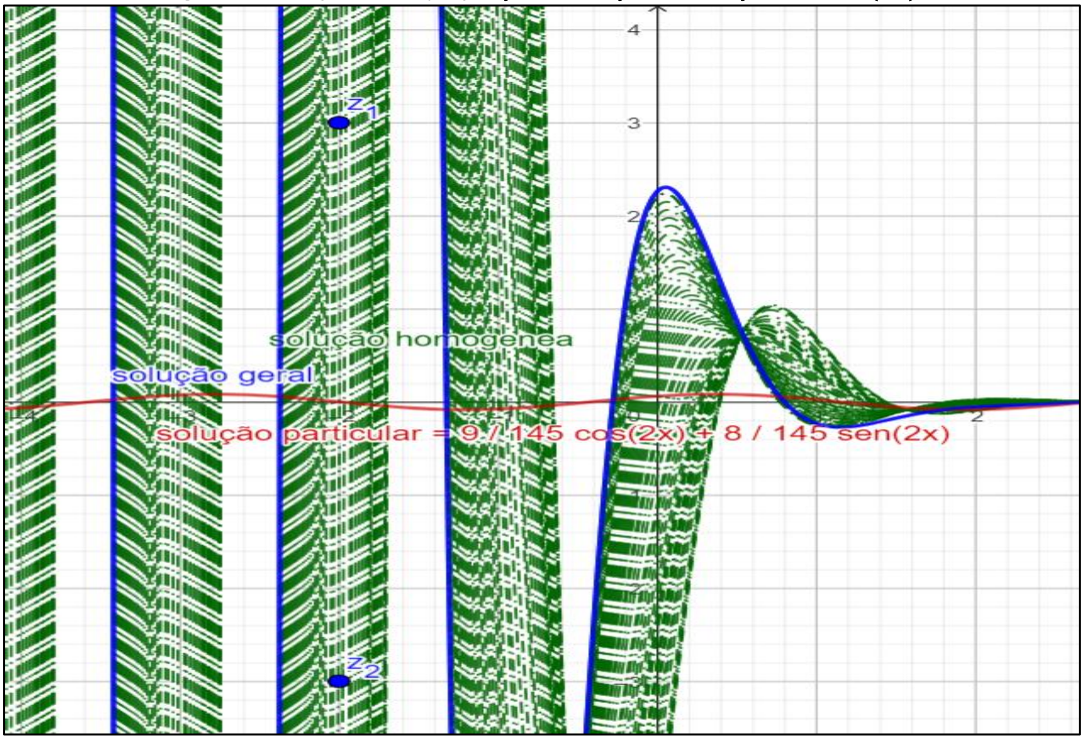
$$-9A + 8B = 1 \Longrightarrow -9A + 8\left(\frac{8A}{9}\right) = 1, \text{ portanto } A = \frac{9}{145} \text{ e } B = \frac{8}{145}.$$

Portanto, a solução particular da equação $y_p(x) = \frac{9}{145}cos(2x) + \frac{8}{145}sen(2x)$, e a solução geral:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
$$y(x) = e^{-2x}\big(C_1\cos(3x) + C_2 sen(3x)\big) + \frac{9}{145}cos(2x) + \frac{8}{145}sen(2x).$$

Situação de Validação: Com o uso do Geogebra, os alunos podem visualizar o comportamento das soluções. Assim, ajustam os valores dos parâmetros C_1 e C_2 para observar como a solução homogênea interage com a solução particular, conforme apresentado na figura 4, em optamos que C_1 e C_2 assumissem valores entre -5 a 5.

Figura 4 - Soluções da equação $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = cos(2x)$



Fonte: Elaborado pelos autores.

Vale salientar que o intervalo escolhido foi para avaliar o comportamento da função com as constantes assumindo valores negativos, positivos e zero, e que outros intervalos poderiam ser escolhidos.

Situação de Institucionalização: Nesta fase, o professor intervém para sistematizar o conhecimento construído. Os alunos discutem suas observações e descobertas, conectando-as aos conceitos teóricos da resolução de EDOs não homogêneas com funções trigonométricas.

Portanto, esperasse que as situações-problema desenvolvidas baseadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD), na Engenharia Didática e no uso do Geogebra destaquem a relevância de uma abordagem integrada e dinâmica para o ensino de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

A TSD ofereceu uma estrutura que permitiu aos alunos avançarem por diferentes fases — ação, formulação, validação e institucionalização — promovendo um processo gradual de construção do conhecimento. A Engenharia Didática desempenhou um papel essencial na organização sistemática das atividades e na adaptação dos conteúdos, garantindo uma sequência didática bem planejada que facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos.

O uso do Geogebra proporcionou uma visualização interativa e gráfica das soluções das

EDOs, permitindo que os alunos explorem, as relações entre as soluções e seus comportamentos dinâmicos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo investigou o potencial de uma abordagem integrada que une a Teoria das Situações Didáticas (TSD), a Engenharia Didática (ED) e o uso do software Geoegbra no ensino e aprendizado de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não homogêneas, com ênfase nas soluções complexas. O objetivo foi propor uma metodologia diferente para o ensino de EDOs em nível superior, e demonstrar como a integração dessas ferramentas pode facilitar o desenvolvimento conceitual e procedimental dos alunos, oferecendo uma compreensão mais profunda e acessível dos conceitos envolvidos.

Desse modo, a ED ofereceu um suporte metodológico para a sistematização das atividades, baseada nas análises preliminares acerca do assunto. O que permitiu que a sequência de situações-problema fosse planejada de maneira estruturada e adaptada ao nível de compreensão dos alunos, garantindo uma progressão gradual do conhecimento.

Essa estruturação foi acompanhada pelo desenvolvimento do Estudo Qualitativo com aporte na Visualização (EQV), que orientou a integração dos aspectos algébricos, geométricos e dinâmicos no tratamento das EDOs. Assim, a sequência de situações-problema pôde ser planejada de maneira estruturada e adaptada ao nível de compreensão dos alunos, garantindo uma progressão gradual do conhecimento.

Enquanto a TSD permitiu que fosse elaborado situações-problema em que os alunos participassem de forma ativa no processo de construção do conhecimento. Essa abordagem incentiva o desenvolvimento de habilidades analíticas e críticas, fundamentais para a resolução de problemas matemáticos.

Além disso, o estudo mostrou que a integração do software Geogebra no ensino de EDOs com soluções complexas pode trazer benefícios significativos para o processo de ensino-aprendizagem. A visualização gráfica das soluções complexas permitiu aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos abstratos envolvidos.

De forma mais detalhada, o uso do Geogebra facilitou a compreensão das propriedades das soluções complexas. Desenvolvendo uma melhor interpretação dos gráficos, especialmente no que diz respeito à separação das partes real e imaginária das soluções. Além disso, a visualização dinâmica proporcionada pelo software ajudou na compreensão do comportamento oscilatório e da convergência das soluções em relação às condições iniciais.

Em pesquisas futuras, espera-se tentar ampliar o desenvolvimento do EQV por meio da criação e implementação de novas situações-problema, bem como da aplicação de intervenções didáticas utilizando as situações desenvolvidas neste artigo. Essas investigações têm o potencial de aprofundar o papel do EQV como uma abordagem que articula teoria e prática, buscando ampliar a compreensão dos alunos sobre o comportamento qualitativo das EDOs. Dessa forma, espera-se consolidar e fortalecer o EQV como um instrumento que auxilie no ensino de equações diferenciais.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; DA SILVA, Maria José Ferreira. Engenharia didática: evolução e diversidade Didactic engineering: evolution and diversity. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/233910256_Engenharia_didatica_evolucao_e_diversidade . Acesso: 24 set.2024.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/314177076_Modelo_de_ensinoaprendizagem_baseado_em_situacoes-problema_aspectos_teoricos_e_metodologicos . Acesso: 24 set.2024.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, Paranaíba, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016. ISSN 2177-7691.

ALVES, Francisco Regis Vieira; CATARINO, Paula Maria Machado Cruz Catarino. Engenharia didática de formação (EDF): Repercussões para a Formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, n. 18, 2017. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/1849 . Acesso em: 24 set. 2024.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática (ED): análises preliminares e a priori para a equação diferencial de Claireaut. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 15, n. 2, p. 1-33, 2020. Disponível em: https://funesfrpre.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1194468/Alves2020Engenharia.pdf . Acesso: 24 set. 2024.

https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925 1984-7505

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BROUSSEAU, G. (1986). **Théorisation des phénomènes d énseignement des Mathématique.** Tese de doutorado. Bourdeaux: Université Bourdeaux I, 905f. Disponível em: https://theses.hal.science/tel-00471995/ Acesso em: 24 set. 2024.

CASTILLO, Luis Andrés; MENDES, Iran Abreu; SÁNCHEZ, Ivonne C.. A PRODUÇÃO CIENTÍFICA SOBRE TECNOLOGIAS DIGITAIS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **Revista Areté | Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, [S.l.], v. 22, n. 36, p. e24024, jan. 2024. ISSN 1984-7505. Disponível em: <https://periodicos.uea.edu.br/index.php/arete/article/view/3856>. Acesso em: 15 set. 2024. doi: https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v22.n36.3856.

DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

JAVARONI, Sueli Liberatti. (2007). **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias.** 231 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) -Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102149/javaroni_sl_dr_rcla.pdf Acesso:24 set. 2024.

PAIVA, Ana Carla Pimentel , ALVES, Francisco Regis Vieira, CAMPOS, Helena Maria de Barros (2024). Development and Implementation of Didactic Sequences for Second Order ODEs: Practical Applications with Geogebra: Desenvolvimento e Implementaçã de Sequências Didáticas para EDOs de Segunda Ordem: Aplicações Práticas com Geogebra. **Revista Digital: Matemática, Educación E Internet,** v.1,n.*25*. https://doi.org/10.18845/meij.v25i1.7235

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Regis Vieira; CAMPOS, H. M. B.; PINHEIRO, D. S. No estudo do Teorema da Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias. **Ciência e Natura,** v. 46, p. 1-26, 2024.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Regis Vieira; CAMPOS, H. M. B.; CIDRÃO, Georgyana Gomes. Um estudo das Envoltórias: Investigando o Lugar Geométrico dos pontos característicos de uma família de curvas com o software Geogebra. **REPPE: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino Universidade Estadual do Norte do Paraná**, v. 8, p. 2215-2227, 2024

MARTINS, Endrigo Antunes et al. Crenças de autoeficácia e atitudes de alunos da Educação Básica: possíveis indicativos de desmotivações para a resolução de questões “matematizadas” de ciências naturais. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, [S.l.], v. 7, n. 2, p. 05-27, jul/dez, 2019. ISSN 2318-6674. http://dx.doi.org/10.26571/REAMEC.a2019.v7.n2.p05-27.i8346.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece o apoio financeiro da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap) – Brasil. O segundo autor reconhece o suporte do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – Brasil. O terceiro autor agradece o financiamento proveniente de fundos nacionais por meio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020), vinculados ao CIDTFF.

COMO CITAR - ABNT

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Régis Vieira; CAMPOS, Helena Maria Barros de. Soluções complexas em EDOS de 2ª ordem: uma abordagem qualitativa no ensino. **Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 24, n. 38, *e*25020, jan./dez., 2025. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925

COMO CITAR - APA

Paiva, A. C. P., Alves, F. R. V., Campos, H. M. B. de. (2025). Soluções complexas em EDOS de 2ª ordem: uma abordagem qualitativa no ensino. *Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências*, *24*(38), *e*25020. https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v24.n38.3925

HISTÓRICO

Submetido: 20 de março de 2025.
Aprovado: 18 de julho de 2025.
Publicado: 30 de dezembro de 2025.